

Mecánica Clásica II

Andrés Laín Sanclemente, Miguel Calvo Arnal¹, Alejandro Cano Jones²,
Juan Guerrero Marcos² y otros³

Versión 1.0.0

¹Ilustre ilustrador.

²Autores de la parte de problemas y correctores oficiales.

³Los demás autores han hecho contribuciones menores y aparecen mencionados tras el índice.

Índice general

1. Sistemas de partículas	3
1.1. Descripción del Sistema	3
1.2. Momento lineal y momento del centro de masas	17
1.2.1. Variación del momento lineal	18
1.2.2. Sistemas de partículas aisladas	19
1.2.3. Sistema de referencia centro de masas	19
1.3. Momento Angular	21
1.3.1. Variación del momento angular	24
1.4. Energía de un sistema de partículas	30
1.4.1. Variación de la energía cinética	31
1.5. Ecuaciones de Lagrange para un sistema de partículas	35
1.6. Problemas	38
2. Sólido rígido	49
2.1. Introducción	49
2.2. Leyes básicas	50
2.3. Rotación en torno a un eje	57
2.3.1. Momento angular	59
2.3.2. Energía cinética	61
2.3.3. Componentes perpendiculares de \vec{J}	69
2.4. Tensor de inercia	71
2.4.1. Endomorfismo de inercia	71
2.4.2. Forma cuadrática de inercia	74
2.4.3. ¿Qué demonios es el tensor de inercia?	75
2.4.4. Ejes principales de inercia y propiedades	76
2.4.5. Cuerpos simétricos	80
2.4.6. Teorema de Steiner	86
2.5. Movimiento de un punto fijo	89
2.6. Velocidad angular instantánea	93
2.7. Ecuaciones de Euler	96
2.8. Ángulos de Euler	102
2.8.1. Definición y explicación	102
2.8.2. Propiedades derivadas	105
2.8.3. Movimiento libre de sólidos rígidos simétricos	105
2.9. Mecánica lagrangiana	111
2.9.1. Nutación	114
2.10. Problemas	120

3. Pequeñas oscilaciones y modos normales de oscilación	128
3.1. Coordenadas ortogonales	128
3.2. Modos normales de oscilación	138
3.3. Osciladores débilmente acoplados	148
3.4. Propiedades para la base de autovectores	151
3.5. Problemas	155
4. Oscilaciones mecánicas	161
4.1. Oscilaciones de partículas en una cuerda	161
4.2. Ecuaciones de Lagrange en una cuerda tensa	166
4.3. Modos normales en una cuerda tensa	173
4.4. Ondas longitudinales	177
4.5. Ondas en una columna de gas	178
4.5.1. Velocidad del sonido	180
4.5.2. Ondas estacionarias en columnas de gas	181
4.6. Propagación de energía en cuerdas	185
4.7. Problemas	189
5. Relatividad especial	190
5.1. Introducción	190
5.1.1. Transformación de Galileo unidimensional	191
5.1.1.1. Invarianza galileana de las leyes de Newton	192
5.1.1.2. Experimento de Michelson-Morley	192
5.2. Postulados de la Relatividad	195
5.3. Dilatación de tiempos	195
5.4. Contracción de longitudes	201
5.5. Transformación de Lorentz unidimensional	202
5.5.1. Transformación directa	202
5.5.2. Transformación inversa	206
5.5.3. Transformación de velocidades unidimensional	207
5.6. El grupo de Lorentz	211
5.6.1. Tipos de transformaciones de Lorentz	213
5.6.2. Cuadrvectores	214
5.6.3. Cono de luz	215
5.7. Momento lineal relativista y energía	217
5.7.1. Por qué la definición clásica de momento lineal falla	217
5.8. Energía cinética relativista	223
5.8.1. Partículas sin masa	228
5.9. Problemas	229

Esta obra está bajo una licencia Creative Commons “Reconocimiento-NoCommercial-CompartirIgual 3.0 España”.



Agradecimientos 1. Un especial agradecimiento a Rossen Dimitrov Gueorguiev por la elaboración de varios modelos 3D utilizados para varios vídeos en el capítulo 2, a saber: la peonza, el paralelepípedo asimétrico (usado en el estudio de la estabilidad de las rotaciones) y la esfera con un cilindro incrustado (usado en el estudio de la nutación).

Agradecimientos 2 (Agradecimientos varios). Gracias a Raúl Almuzara Diarte, Andrés Martín Megino, Mireia Martínez Aznar y Manuel Romeo Monterde por corrección de erratas.

Capítulo 1

Sistemas de partículas

1.1. Descripción del Sistema

Postulado 1. Consideramos que cualquier cuerpo material está formado por un conjunto de partículas lo suficientemente pequeñas como para suponer que son puntuales, pero no tan pequeñas como para tener que trabajar con física cuántica.

Postulado 2. Sea un sistema de N partículas. Las partículas que integran dicho sistema pueden interactuar entre ellas y pueden estar sometidas a fuerzas externas.

Notación 1. Cuando tengamos un sistema de N partículas, a cada partícula le asignaremos un subíndice (un número natural) desde $i = 1$ hasta $i = N$. A la fuerza interna que actúa sobre la partícula i -ésima debido a la partícula j -ésima la vamos a denotar con \vec{F}_{ij} ; es decir, primero escribiremos el índice de la partícula que recibe la acción y después el índice de la partícula que la genera. Por otra parte, a la fuerza externa que actúa sobre la partícula i -ésima la vamos a denotar con un solo índice: \vec{F}_i .

Postulado 3. Una partícula no puede hacer fuerza sobre sí misma, luego $\vec{F}_{ii} = \vec{0} \forall i = 1, \dots, N$.

Teorema 1 (Equivalencia entre cuerpos con volumen y sistemas de infinitas partículas). *Sea un cuerpo con volumen, cuyos puntos forman el conjunto $V \subset \mathbb{R}^m$, siendo V medible Lebesgue y sea $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ la función densidad volumétrica asociada al cuerpo tal que ρ es continua en casi todo punto de V y está acotada en módulo en V por una constante $R \in [0, \infty)$. Además, sea $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ (con $n \in \mathbb{N}$) continua en casi todo punto de V y también acotada en norma por una constante $F \in [0, \infty)$. Entonces, existen dos sucesiones $\{m_{N;i}\}_{i=1}^{(2N)^n}$ y $\{\vec{r}_{N;i}\}_{i=1}^{(2N)^n}$ (que dependen de $N \in \mathbb{N}$) tales que:*

$$\iiint_V \rho(\vec{r}) f(\vec{r}) dV = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^n} m_{N;i} f(\vec{r}_{N;i})$$

con $m_{N;i} \in \mathbb{R}$ y $\vec{r}_{N;i} \in V \forall i = 1, \dots, (2N)^n \wedge \forall N \in \mathbb{N}$.

Observación 1. La demostración del teorema 1 no está al alcance del estudiante de física de segundo de carrera, pues para su comprensión hacen falta conceptos de teoría de la medida y, sobre todo, de la integral de Lebesgue.

No obstante, el resultado anterior es **fundamental** en física; ya que implica que un cuerpo (sólido, líquido o gas) puede interpretarse como un sistema de infinitas partículas. Es decir, nos va a permitir extender todas las leyes que conocemos para un sistema de partículas a cualquier cuerpo con un volumen.

Demostración. Usaremos la notación:

$$\int_V \rho f := \iiint_V \rho(\vec{r}) f(\vec{r}) dV \tag{1.1.1}$$

más acorde con la teoría de la integración de Lebesgue. Como, ρ y f son continuas en casi todo punto, ρ y f son integrables Lebesgue. Dado que el producto de funciones integrables es integrable, la integral anterior está bien definida.

Esta demostración va a ser larga, por lo que vamos a elaborar un esquema de los pasos a seguir:

1. Como ρ y f son continuas, podremos restringir la integral de la ecuación 1.1.1 en la página anterior a un conjunto $W \subseteq V$ en el que f y ρ sean continuas.
2. Probaremos que $g := \rho f$ está acotada en módulo por una constante G . Por tanto, cada una de las componentes de g también está acotada por G .
3. Definiremos una sucesión de conjuntos medibles $\left\{ \{T_{N,i}\}_{i=-(N-1)}^N \right\}_{N=1}^{\infty}$. Para un N fijo, los conjuntos $T_{N,i}$ son disjuntos entre sí y además:

$$[-G, G] = \bigcup_{i=-(N-1)}^N T_{N,i}$$

4. Partitionaremos el recorrido de g en «hipercubos» $K_{N;i_1, \dots, i_n}$ medibles, disjuntos entre sí y cuya unión es $[-G, G]^n$.
5. Crearemos una sucesión de conjuntos $E_{N;i_1, \dots, i_n}$ medibles que son disjuntos entre sí y cuya unión es W .
6. Construiremos una sucesión de funciones $\{g_N\}_{N=1}^{\infty}$ a partir de los $E_{N;i_1, \dots, i_n}$ que converge a g cuando $N \rightarrow \infty$. Además, $\|g_N\| \leq G \ \forall N \in \mathbb{N}$.
7. Usaremos el teorema de la convergencia dominada para demostrar:

$$\int_W g = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_W g_N$$

8. Con el fin de aligerar la notación cambiaremos los múltiples índices i_1, \dots, i_n por un único índice i .
9. Expresaremos $\int_W g$ como:

$$\int_W g = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \hat{x}_j \int_W \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho(\vec{r}_{N;i}) f^j(\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}}$$

siendo \hat{x}_j el vector unitario j -ésimo de la base canónica de \mathbb{R}^n .

10. Demostraremos que se pueden obtener sucesiones de funciones simples medibles $\{\rho_N^+\}_{N=1}^{\infty}$, $\{\rho_N^-\}_{N=1}^{\infty}$, $\{f_N^{j,+}\}_{N=1}^{\infty}$ y $\{f_N^{j,-}\}_{N=1}^{\infty} \ \forall j = 1, \dots, n$ tales que:

$$\int_W \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho(\vec{r}_{N;i}) f^j(\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}} = \int_W \rho_N^+ f_N^{j,+} - \int_W \rho_N^- f_N^{j,+} - \int_W \rho_N^+ f_N^{j,-} + \int_W \rho_N^- f_N^{j,-}$$

donde $\rho_N^+ f_N^{j,+}$, $\rho_N^- f_N^{j,+}$, $\rho_N^+ f_N^{j,-}$, $\rho_N^- f_N^{j,-}$ también son funciones simples. Con esto, hemos conseguido expresar $\int_W \rho f$ como la suma de integrales de funciones simples.

11. Existe una sucesión de números reales $\left\{ \{m_{N,i}\}_{i=1}^{(2N)^n} \right\}_{N=1}^{\infty}$ tales que:

$$\int_W \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho(\vec{r}_{N;i}) f^j(\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}} = \sum_{i=1}^{(2N)^n} m_{N,i} f^j(\vec{r}_{N;i})$$

12. Llegamos al enunciado volviendo a unir todos los términos mediante la expresión dada en el punto 9 en la página anterior.

Dicho todo esto, podemos comenzar:

1. Nótese que ρf será continua en donde f y ρ sean ambas continuas; ya que la composición de funciones continuas es continua. Llamemos C_1 al conjunto en el que ρ no es continua y C_2 al conjunto en el que f no es continua. Por hipótesis es $\text{me}(C_1) = \text{me}(C_2) = 0$, ya que ρ y f son continuas en casi todo punto de V . Por último, denominemos W al conjunto $W := V \setminus C_1 \setminus C_2$. Como tanto ρ como f son continuas en W , ρf será continua en W . Bien, ahora reescribamos la ecuación 1.1.1 en la página 3:

$$\int_V \rho f = \underbrace{\int_{C_1} \rho f}_{=0} + \underbrace{\int_{C_2} \rho f}_{=0} + \int_{V \setminus C_1 \setminus C_2} \rho f = \int_W \rho f$$

donde los términos marcados se anulan, pues la integral de cualquier función a lo largo de un conjunto de medida nula es nula.

2. Definimos $g := \rho f$. Como, por hipótesis, ρ está acotada en módulo por R en V y f está acotada en norma por F en V , g estará acotada por:

$$\|g\| = \|\rho f\| = |\rho| \|f\| \leq RF =: G$$

en W . Antes de proceder, notemos que:

$$|g^j(\vec{r})| \leq \|g(\vec{r})\| \leq G \quad \forall \vec{r} \in W \wedge \forall j = 1, \dots, n$$

donde con g^j nos referimos a la componente j -ésima de g . Así, sabemos que la componente j -ésima de $g(\vec{r})$ variará como mucho de $-G$ a G .

3. Definimos los conjuntos:

$$\begin{aligned} T_{N,i} &:= \left[\frac{(i-1)G}{N}, \frac{iG}{N} \right] \quad \forall i = -(N-1), \dots, N-1 \wedge \forall N \in \mathbb{N} \\ T_{N,N} &:= \left[\frac{(N-1)G}{N}, \frac{N}{N}G \right] = \left[\frac{N-1}{N}G, G \right] \quad \forall N \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

De esta forma, hemos definido una sucesión de conjuntos: $\left\{ \{T_{N,i}\}_{i=-(N-1)}^N \right\}_{N=1}^{\infty}$. Nótese que estos conjuntos son medibles pues son intervalos de \mathbb{R} y todo intervalo de \mathbb{R} es medible.

Probemos que para un N fijo, estos conjuntos son disjuntos entre sí. Sea $x \in T_{N,i}$ y veamos que $x \notin T_{N,j}$ $\forall j \neq i$.

- Si $i \in \{-(N-1), \dots, N-1\}$, entonces, por definición de $T_{N,i}$ se cumple:

$$\frac{i-1}{N}G \leq x < \frac{iG}{N}$$

Si es $j > i$, entonces es $j \geq i+1$ y, en consecuencia:

$$\frac{j-1}{N}G \geq \frac{i+1-1}{N}G = \frac{iG}{N} > x$$

Luego $x \notin T_{N,j}$ si $j > i$. Por otra parte, si es $j < i$, entonces es $j \leq i-1$ y, por consiguiente:

$$\frac{jG}{N} \leq \frac{i-1}{N}G \leq x$$

Luego $x \notin T_{N,j}$ si $j < i$. Por ende, $x \notin T_{N,j} \forall j \neq i$.

- Si $i = N$, entonces por definición de $T_{N,N}$ se da:

$$\frac{N-1}{N}G \leq x \leq G$$

Necesariamente es $j \leq N-1$, pues no puede ser $j > N$. De esta forma:

$$\frac{jG}{N} \leq \frac{N-1}{N}G \leq x$$

Luego $x \notin T_{N,j} \forall j \neq i$.

Por tanto, los conjuntos $T_{N,i}$ son disjuntos entre sí. Además, probemos ahora que es:

$$[-G, G] = \bigcup_{i=-(N-1)}^N T_{N,i} \quad (1.1.2)$$

Probaremos esto por doble contenido.

- ⊃: Sea $x \in T_{N,i}$ para algún $i \in \{-(N-1), \dots, N\}$.
 - Si es $i < N$, entonces por definición de $T_{N,i}$ tenemos:

$$\frac{i-1}{N}G \leq x < \frac{iG}{N}$$

Como es $i \geq -(N-1)$ e $i < N$, obtenemos:

$$-G \leq \frac{-N}{N}G = \frac{-N+1-1}{N}G = \frac{-(N-1)-1}{N}G \leq \frac{i-1}{N}G \leq x < \frac{iG}{N} < \frac{N}{N}G = G$$

Por tanto $x \in [-G, G]$.

- Si es $i = N$, entonces por definición de $T_{N,N}$ tenemos:

$$\frac{N-1}{N}G \leq x \leq G$$

Como $\frac{N-1}{N} \geq 0$, obtenemos:

$$-G < 0 \leq \frac{N-1}{N}G \leq x \leq G$$

Luego $x \in [-G, G]$.

- ⊂: Sea $x \in [-G, G]$. Vamos a demostrar por reducción al absurdo que x debe pertenecer a algún $T_{N,i}$. Por tanto, supongamos que $x \notin T_{N,i} \forall i = -(N-1), \dots, N$. Vamos a probar que, bajo este supuesto y sabiendo que es $x \geq -G$, debe ser necesariamente $x > G$, lo que es absurdo. Vamos a probar esto último por una especie de «inducción» sobre i .

- Como $x \notin T_{N,i} \forall i = -(N-1), \dots, N$, en particular, $x \notin T_{N,-(N-1)}$. Luego, por definición de $T_{N,-(N-1)}$, tenemos:

$$x < \frac{-(N-1)-1}{N}G = -\frac{N}{N}G = -G \quad \vee \quad x \geq \frac{-(N-1)}{N}G$$

Como es $x \geq -G$, debe ser:

$$x \geq \frac{-(N-1)}{N}G$$

- Suponiendo que es $x \geq \frac{i}{N}G$, veamos que es $x \geq \frac{i+1}{N}G$ siempre que sea $i < N$. Como $x \notin T_{N,i+1}$, tenemos que es:

$$x < \frac{i+1-1}{N}G = \frac{i}{N}G \quad \vee \quad x \geq \frac{i+1}{N}G$$

Como es $x \geq \frac{i}{N}G$, debe ser $x \geq \frac{i+1}{N}G$.

- Por último, sea $i = N$. Utilizando el argumento visto hasta la fecha hemos probado que necesariamente es $x \geq \frac{N-1}{N}G$. Veamos que tiene que ser $x > G$. Como $x \notin T_{N,N}$, por definición de $T_{N,N}$, se da:

$$x < \frac{N-1}{N}G \quad \vee \quad x > \frac{N}{N}G = G$$

Como es $x \geq \frac{N-1}{N}G$, debe ser $x > G$.

Con esto llegamos a absurdo pues era $-G \leq x \leq G$. Así, x debe pertenecer a algún $T_{N,i}$.

En consecuencia, se cumple la ecuación 1.1.2 en la página anterior.

- Definimos los conjuntos $K_{N;i_1, \dots, i_n}$ como:

$$K_{N;i_1, \dots, i_n} := T_{N,i_1} \times \cdots \times T_{N,i_n} \quad \forall i_1, \dots, i_n = -(N-1), \dots, N \quad \wedge \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

donde n es la dimensión del espacio de llegada de $f: \mathbb{R}^n$. Para que el lector pueda hacerse una idea de lo que acabamos de hacer, es como si hubiéramos partido $[-G, G]^n$ en «hipercubos» cerrados por unas hipercaras y abiertos por otras.

Los conjuntos $K_{N;i_1, \dots, i_n}$ son medibles, pues se han obtenido como producto cartesiano de conjuntos medibles (los $T_{N,i}$ son medibles por el punto 3 en la página 4).

Ahora queremos demostrar que los conjuntos $K_{N;i_1, \dots, i_n}$ son disjuntos entre sí. Sea $y \in K_{N;i_1, \dots, i_n}$, entonces, por definición de $K_{N;i_1, \dots, i_n}$, será $y^j \in T_{N,i_j} \quad \forall j = 1, \dots, n$, donde con el superíndice j indicamos la componente j -ésima de y . Como T_{N,i_j} es el único conjunto $T_{N,i}$ que contiene a y^j por el punto 3 en la página 4 (y este argumento es válido para todo $j = 1, \dots, n$), el único conjunto que se puede expresar como producto cartesiano de los $T_{N,i}$ que contiene a y es, precisamente $K_{N;i_1, \dots, i_n}$ (el conjunto de partida). De esta forma, los conjuntos $K_{N;i_1, \dots, i_n}$ heredan la propiedad de ser disjuntos de los $T_{N,i}$. Por último, nos queda ver que, efectivamente:

$$[-G, G]^n = \bigcup_{i_1=-(N-1)}^N \cdots \bigcup_{i_n=-(N-1)}^N K_{N;i_1, \dots, i_n} \quad (1.1.3)$$

Probaremos esto por doble contenido:

- \subset : Sea $y \in [-G, G]^n$. Entonces será $y^j \in [-G, G] \quad \forall j = 1, \dots, n$ donde con y^j denotamos la componente j -ésima del vector y . Por el punto 3 en la página 4, sabemos que existe un (único) $i_j \in \{-(N-1), \dots, N\}$ tal que $y^j \in T_{N,i_j} \quad \forall j = 1, \dots, n$. De esta forma, será:

$$y \in T_{N,i_1} \times T_{N,i_2} \times \cdots \times T_{N,i_n} = K_{N;i_1, \dots, i_n}$$

Así $y \in K_{N;i_1, \dots, i_n}$.

- \supset : Sea $y \in K_{N;i_1, \dots, i_n}$. Por la definición de $K_{N;i_1, \dots, i_n}$, tenemos que $y^j \in T_{N,i_j} \quad \forall j = 1, \dots, n$. Por el punto 3 en la página 4, sabemos que $y^j \in [-G, G] \quad \forall j = 1, \dots, n$. Por ello, $y \in [-G, G]^n$.

Así, efectivamente, se cumple la ecuación 1.1.3.

5. Definimos los conjuntos:

$$E_{N;i_1,\dots,i_n} := \{\vec{r} \in W \text{ t.q. } g(\vec{r}) \in K_{N;i_1,\dots,i_n}\}$$

Como g es integrable Lebesgue por el punto 1 en la página 4, en particular será medible. Como g es medible, la antiimagen de cualquier conjunto medible es medible. Ya que los $K_{N;i_1,\dots,i_n}$ son medibles por el punto 4 en la página 4, los $E_{N;i_1,\dots,i_n}$ también lo serán.

A continuación, veamos que los $E_{N;i_1,\dots,i_n}$ son disjuntos entre sí. Para ello, usaremos reducción al absurdo. Supongamos que existe un $\vec{r} \in W$ tal que $\vec{r} \in E_{N;i_1,\dots,i_n} \wedge \vec{r} \in E_{N;j_1,\dots,j_n}$ con $E_{N;i_1,\dots,i_n} \neq E_{N;j_1,\dots,j_n}$. Entonces, $g(\vec{r})$ cumpliría $g(\vec{r}) \in K_{N;i_1,\dots,i_n} \wedge g(\vec{r}) \in K_{N;j_1,\dots,j_n}$ con $K_{N;i_1,\dots,i_n} \neq K_{N;j_1,\dots,j_n}$ y esto es absurdo, pues, por el punto 4 en la página 4, los $K_{N;i_1,\dots,i_n}$ son disjuntos entre sí.

Por último, debemos demostrar que:

$$W = \bigcup_{i_1=-(N-1)}^N \dots \bigcup_{i_n=-(N-1)}^N E_{N;i_1,\dots,i_n}$$

Probaremos esto por doble contenido.

- ⊂: Sea $\vec{r} \in W$. Entonces, $g(\vec{r}) \in \text{Im}(g)$. Por el punto 2 en la página 4, sabemos que g está acotada en norma por G . Luego, se da $\text{Im}(g) \subseteq [-G, G]^n$. Como, por el punto 4 en la página 4 es:

$$[-G, G]^n = \bigcup_{i_1=-(N-1)}^N \dots \bigcup_{i_n=-(N-1)}^N K_{N;i_1,\dots,i_n}$$

necesariamente existen $i_1, \dots, i_n \in \{-(N-1), \dots, N\}$ tales que $g(\vec{r}) \in K_{N;i_1,\dots,i_n}$. Por definición de $E_{N;i_1,\dots,i_n}$, se da $\vec{r} \in E_{N;i_1,\dots,i_n}$.

- ⊃: Sea $\vec{r} \in E_{N;i_1,\dots,i_n}$. Por definición de $E_{N;i_1,\dots,i_n}$, es $\vec{r} \in W$.

6. Para cada uno de los conjuntos definidos en el punto 5 en la página 4, escogeremos un representante que llamaremos $\vec{r}_{N;i_1,\dots,i_n}$ de la siguiente forma:

$$\vec{r}_{N;i_1,\dots,i_n} = \begin{cases} \text{cualquier } \vec{r} \in W & \text{si } E_{N;i_1,\dots,i_n} = \emptyset \\ \text{cualquier } \vec{r} \in E_{N;i_1,\dots,i_n} & \text{si } E_{N;i_1,\dots,i_n} \neq \emptyset \end{cases} \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Ahora, definimos la sucesión de funciones $g_N \forall N \in \mathbb{N}$ como:

$$g_N := \sum_{i_1=-(N-1)}^N \dots \sum_{i_n=-(N-1)}^N g(\vec{r}_{N;i_1,\dots,i_n}) \chi_{E_{N;i_1,\dots,i_n}}(\vec{r}) \quad (1.1.4)$$

donde $\chi_{E_{N;i_1,\dots,i_n}}$ es la función característica asociada a $E_{N;i_1,\dots,i_n}$ que viene dada por:

$$\chi_{E_{N;i_1,\dots,i_n}}(\vec{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{r} \in E_{N;i_1,\dots,i_n} \\ 0 & \text{si } \vec{r} \notin E_{N;i_1,\dots,i_n} \end{cases} \quad \forall i_1, \dots, i_n = -(N-1), \dots, N$$

Veamos que la sucesión $\{g_N\}_{N=1}^{\infty}$ converge a g . Sea $\vec{r} \in W$. Por el punto 5 en la página 4, sabemos que existe uno y sólo un $E_{N;i_1,\dots,i_n}$ tal que $\vec{r} \in E_{N;i_1,\dots,i_n}$. De esta forma, todos los sumandos de la expresión 1.1.4 serán nulos salvo el que contiene a $\chi_{E_{N;i_1,\dots,i_n}}$. Es decir, será:

$$g_N(\vec{r}) = g(\vec{r}_{N;i_1,\dots,i_n}) \underbrace{\chi_{E_{N;i_1,\dots,i_n}}(\vec{r})}_{=1} = g(\vec{r}_{N;i_1,\dots,i_n})$$

Como tanto \vec{r} como $\vec{r}_{N;i_1,\dots,i_n}$ pertenecen a $E_{N;i_1,\dots,i_n}$, se dará $g(\vec{r}) \in K_{N;i_1,\dots,i_n}$ y $g_N(\vec{r}) = g(\vec{r}_{N;i_1,\dots,i_n}) \in K_{N;i_1,\dots,i_n}$. Por tanto, $g^j(\vec{r}) \in T_{N,i_j}$ y $g_N^j(\vec{r}) = g^j(\vec{r}_{N;i_1,\dots,i_n}) \in T_{N,i_j}$ para algún $i_j \in \{-(N-1), \dots, N\}$

donde con el superíndice j indicamos la componente j -ésima de las funciones g y g_N . Por la definición de los $T_{N,i}$, tenemos que:

$$\left| g_N^j(\vec{r}) - g^j(\vec{r}) \right| \leq \frac{i}{N}G - \frac{i-1}{N}G = \frac{i}{N}G - \frac{i}{N}G + \frac{1}{N}G = \frac{G}{N}$$

Cuando $N \rightarrow \infty$, $\left| g_N^j(\vec{r}) - g^j(\vec{r}) \right| \rightarrow 0$, luego $g_N^j(\vec{r}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} g^j(\vec{r})$. Como el argumento anterior es válido para todo $j = 1, \dots, n$, $g_N(\vec{r})$ converge a $g(\vec{r})$ componente a componente y, por tanto, converge. Es decir, se da:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} g_N(\vec{r}) = g(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \in W$$

Por último, probemos que es $\|g_N(\vec{r})\| \leq G \quad \forall \vec{r} \in W \wedge \forall N \in \mathbb{N}$. Sea $\vec{r} \in W$. Siguiendo el mismo argumento que antes, obtenemos que:

$$g_N(\vec{r}) = g(\vec{r}_{N;i_1, \dots, i_n})$$

Por tanto:

$$\|g_N(\vec{r})\| = \|g(\vec{r}_{N;i_1, \dots, i_n})\| \leq G \quad \forall \vec{r} \in W \wedge \forall N \in \mathbb{N}$$

pues g está acotada en norma por G como vimos en el punto 2 en la página 4.

7. Planteamos la integral $\int_W g$, que está bien definida por el punto 1 en la página 4. Utilizando la sucesión construida en el punto 6 en la página 4, obtenemos:

$$\int_W g = \int_W \lim_{N \rightarrow \infty} g_N$$

pues $g_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} g$. Como, además, por el punto 6 en la página 4, se da $\|g_N\| \leq G$ donde G es una constante y, en consecuencia, integrable Lebesgue, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada para sacar el límite fuera de la integral. Así:

$$\int_W g = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_W g_N$$

8. Nuestro objetivo es realizar una correspondencia biyectiva entre $A := \{-(N-1), \dots, N\}^n$ y $B := \{1, \dots, (2N)^n\}$. Lo primero, notemos que ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos, pues:

$$|A| = (N - (-(N-1)) + 1)^n = (N + N - 1 + 1)^n = (2N)^n$$

$$|B| = (2N)^n - 1 + 1 = (2N)^n$$

Luego una correspondencia biyectiva es posible. Definimos la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} h : & A & \longrightarrow B \\ & (i_1, \dots, i_n) & \longrightarrow i = h(i_1, \dots, i_n) \end{array}$$

donde:

$$i := (2N)^{n-1} (i_1 + N - 1) + \dots + (2N)^2 (i_{n-2} + N - 1) + 2N (i_{n-1} + N - 1) + (i_n + N) =$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^n (2N)^{n-j} (i_j + N - 1)$$

Por la definición dada para i , dados (i_1, \dots, i_n) está claro que obtenemos un único posible valor de i . Veamos que el recíproco también es cierto. Vamos a definir una aplicación $l : B \rightarrow A$ y a verificar que $l \circ h = \text{id}$.

$$l(i) := (i_1, \dots, i_n) = \left(\left\lfloor \frac{i-1}{(2N)^{n-1}} \right\rfloor - N + 1, \left\lfloor \frac{i-1 - (2N)^{n-1}(i_1 + N - 1)}{(2N)^{n-2}} \right\rfloor - N + 1, \dots, \right. \\ \left. \frac{i-1 - \sum_{k=1}^{j-1} (2N)^{n-k} (i_k + N - 1)}{(2N)^{n-j}} - N + 1, \dots, \frac{i-1 - \sum_{k=1}^{n-1} (2N)^{n-k} (i_k + N - 1)}{\underbrace{(2N)^0}_{=1}} - N + 1 \right)$$

donde con $\lfloor \rfloor$ indicamos «función suelo». Nótese que para el cálculo de i_j es necesario haber obtenido i_{j-1} con anterioridad. Probemos componente a componente que, efectivamente, $l \circ h = \text{id}$:

$$i_j = \left\lfloor \frac{i-1 - \sum_{k=1}^{j-1} (2N)^{n-k} (i_k + N - 1)}{(2N)^{n-j}} \right\rfloor - N + 1 = \\ = \left\lfloor \frac{1 + \sum_{k=1}^n (2N)^{n-k} (i_k + N - 1) - 1 - \sum_{k=1}^{j-1} (2N)^{n-k} (i_k + N - 1)}{(2N)^{n-j}} \right\rfloor - N + 1 = \\ = \left\lfloor \frac{\sum_{k=j}^n (2N)^{n-k} (i_k + N - 1)}{(2N)^{n-j}} \right\rfloor - N + 1 = \\ = \left\lfloor \frac{(2N)^{n-j} (i_j + N - 1) + \sum_{k=j+1}^n (2N)^{n-k} (i_k + N - 1)}{(2N)^{n-j}} \right\rfloor - N + 1 = \\ = \left\lfloor i_j + N - 1 + \frac{\sum_{k=j+1}^n (2N)^{n-k} (i_k + N - 1)}{(2N)^{n-j}} \right\rfloor - N + 1$$

Por otra parte, como es $i_k \leq N \ \forall k = 1, \dots, n$, obtenemos:

$$\sum_{k=j+1}^n (2N)^{n-k} (i_k + N - 1) \leq \sum_{k=j+1}^n (2N)^{n-k} (2N - 1) = (2N - 1) \sum_{k=j+1}^n (2N)^{n-k} =$$

$$= (2N - 1) \sum_{l=0}^{n-j-1} (2N)^l = (2N - 1) \frac{1 - (2N)^{n-j}}{1 - 2N} = -1 + (2N)^{n-j} < (2N)^{n-j}$$

Por tanto:

$$i_j = \left\lfloor \underbrace{i_j + N - 1}_{\in \mathbb{N} \cup \{0\}} + \underbrace{\frac{\sum_{k=j+1}^n (2N)^{n-k} (i_k + N - 1)}{(2N)^{n-j}}}_{< 1} \right\rfloor - N + 1 = \\ = [i_j + N - 1] - N + 1 = i_j + N - 1 - N + 1 = i_j$$

Como este argumento es válido para todo $j = 1, \dots, n$, debe ser $l \circ h = \text{id}$. Con esto, hemos demostrado que h es suprayectiva. Necesitamos probar, también, que h es inyectiva. Para ello, tenemos que ver que a n -tuplas distintas $(i_1, \dots, i_n) \neq (j_1, \dots, j_n)$ les corresponden imágenes a través de h distintas: $i = h(i_1, \dots, i_n) \neq h(j_1, \dots, j_n) = j$. Para ello, haremos inducción sobre n .

- $n = 1$: Sean $i_1, j_1 \in A$. En este caso es:

$$i = h(i_1) = i_1 + N - 1$$

$$j = h(j_1) = j_1 + N - 1$$

Trivialmente se da $i = j \Leftrightarrow i_1 = j_1$.

- Supongamos que la hipótesis se cumple para $n - 1$ y veamos que también se satisface para n . Sean $(i_1, \dots, i_n), (j_1, \dots, j_n) \in A$ e $i = h(i_1, \dots, i_n), j = h(j_1, \dots, j_n)$. Estudiemos los siguientes casos:

- Si es $i_1 = j_1$, entonces, consideramos las $n - 1$ -tuplas (i_2, \dots, i_n) y (j_2, \dots, j_n) . Por hipótesis de inducción será $i = j \Leftrightarrow (i_2, \dots, i_n) \Leftrightarrow (j_2, \dots, j_n)$ ya que es $i_1 = j_1$. Es decir, será $i = j \Leftrightarrow (i_1, \dots, i_n) = (j_1, \dots, j_n)$.
- Si, sin embargo, es $i_1 \neq j_1$, también consideramos las $n - 1$ -tuplas (i_2, \dots, i_n) y (j_2, \dots, j_n) . Llamemos $i' := h(i_2, \dots, i_n)$ y $j' := h(j_2, \dots, j_n)$. Tenemos que ver que es $i \neq j$. Para ello, estudiemos:

$$i = h(i_1, \dots, i_n) = (2N)^{n-1} (i_1 + N - 1) + \underbrace{\sum_{k=2}^n (2N)^{n-k} (i_k + N - 1) + 1}_{=: i'} = \\ = (2N)^{n-1} (i_1 + N - 1) + i' \\ j = h(j_1, \dots, j_n) = (2N)^{n-1} (j_1 + N - 1) + \underbrace{\sum_{k=2}^n (2N)^{n-k} (j_k + N - 1) + 1}_{=: j'} = \\ = (2N)^{n-1} (j_1 + N - 1) + j'$$

Por hipótesis de inducción, será $i' = j' \Leftrightarrow (i_2, \dots, i_n) = (j_2, \dots, j_n)$.

- Si es $i' = j'$, entonces:

$$i - j = (2N)^{n-1} (i_1 + N - 1) + \underbrace{i' - j'}_{=0} - (2N)^{n-1} (j_1 + N - 1) = \\ = (2N)^{n-1} (i_1 - j_1)$$

Y, claramente es:

$$i = j \Leftrightarrow i - j = 0 \xrightarrow{(2N)^{n-1} > 0} i_1 = j_1$$

Como habíamos supuesto $i_1 \neq j_1$, necesariamente será $i \neq j$.

- Si es $i' \neq j'$, entonces:

$$i - j = (2N)^{n-1} (i_1 - j_1) + i' - j' \quad (1.1.5)$$

Por otra parte:

$$\left| (2N)^{n-1} (i_1 - j_1) \right| = (2N)^{n-1} |i_1 - j_1|$$

Como es $i_1 \neq j_1$, será $|i_1 - j_1| \geq 1$ y, por consiguiente:

$$\left| (2N)^{n-1} (i_1 - j_1) \right| \geq (2N)^{n-1} \quad (1.1.6)$$

A continuación, estudiemos:

$$\begin{aligned} |i' - j'| &= \left| \sum_{k=2}^n (2N)^{n-k} (i_k + N - 1) + 1 - \sum_{k=2}^n (2N)^{n-k} (j_k + N - 1) - 1 \right| = \\ &= \left| \sum_{k=2}^n (2N)^{n-k} (i_k - j_k) \right| \end{aligned}$$

Por la desigualdad triangular es:

$$|i' - j'| \leq \sum_{k=2}^n (2N)^{n-k} |i_k - j_k|$$

Dado que $i_k, j_k \in \{-(N-1), \dots, N\}$ se da $|i_k - j_k| \leq 2N - 1$ y, por consiguiente:

$$\begin{aligned} |i' - j'| &\leq \sum_{k=2}^n (2N)^{n-k} (2N - 1) = (2N - 1) \sum_{k=2}^n (2N)^{n-k} = \\ &= (2N - 1) \sum_{l=0}^{n-2} (2N)^l = (2N - 1) \frac{(2N)^{n-1} - 1}{2N - 1} = (2N)^{n-1} - 1 < (2N)^{n-1} \quad (1.1.7) \end{aligned}$$

Combinando las ecuaciones 1.1.5, 1.1.6 y 1.1.7, obtenemos que es imposible que sea $i = j$, pues $\left| (2N)^{n-1} (i_1 - j_1) \right| > |i' - j'|$.

- Este es un cambio a un sólo índice usado frecuentemente en informática que permite pasar de varios índices a uno sólo. De esta forma, a partir de ahora denotaremos los conjuntos dados en el punto 5 en la página 4 como $E_{N;i}$ con $i = 1, \dots, (2N)^n$, la sucesión $\{\vec{r}_{N;i_1, \dots, i_n}\}_{N=1}^{\infty}$ recibirá la notación $\{\vec{r}_{N;i}\}_{N=1}^{\infty}$ con $i = 1, \dots, (2N)^n$ y la sucesión de funciones dada en el punto 6 en la página 4 será referida como:

$$g_N(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{(2N)^n} g(\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}}(\vec{r})$$

- Por el punto 2 en la página 4, sabemos que es $g(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) f(\vec{r}) \forall \vec{r} \in W$. Por tanto, podemos expresar la sucesión dada en el punto 6 en la página 4 como:

$$g_N(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho(\vec{r}_{N;i}) f(\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}}(\vec{r})$$

Por otra parte, sabemos que es:

$$f(\vec{r}_{N;i}) = \sum_{j=1}^n f^j(\vec{r}_{N;i}) \hat{x}_j$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} g_N(\vec{r}) &= \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho(\vec{r}_{N;i}) \left[\sum_{j=1}^n f^j(\vec{r}_{N;i}) \hat{x}_j \right] \chi_{E_{N;i}}(\vec{r}) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho(\vec{r}_{N;i}) f^j(\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}}(\vec{r}) \hat{x}_j \end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión dada por el punto 7 en la página 4, llegamos a:

$$\int_W g = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_W \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho(\vec{r}_{N;i}) f^j(\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}} \hat{x}_j$$

Como la integral es lineal, se da:

$$\int_W g = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \hat{x}_j \int_W \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho(\vec{r}_{N;i}) f^j(\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}}$$

11. Descomponemos $\rho(\vec{r}_{N;i})$ y $f^j(\vec{r}_{N;i})$ en su componente positiva y negativa, es decir:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}_{N;i}) &= \rho^+(\vec{r}_{N;i}) - \rho^-(\vec{r}_{N;i}) \\ f^j(\vec{r}_{N;i}) &= f^{j,+}(\vec{r}_{N;i}) - f^{j,-}(\vec{r}_{N;i}) \end{aligned}$$

donde lo anterior lo hacemos $\forall i = 1, \dots, (2N)^n$ y $\forall N \in \mathbb{N}$, siendo $\rho^+, \rho^-, f^{j,+}, f^{j,-} \geq 0$. Bien, ahora construimos sucesiones de funciones simples:

$$\begin{aligned} \rho_N^+ &:= \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho^+(\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}}, \quad \rho_N^- := \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho^-(\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}} \\ f_N^{j,+} &:= \sum_{i=1}^{(2N)^n} f^{j,+}(\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}}, \quad f_N^{j,-} := \sum_{i=1}^{(2N)^n} f^{j,-}(\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}} \end{aligned}$$

$\forall N \in \mathbb{N}$. Nótese que lo anterior son funciones simples pues es $\rho^+, \rho^-, f^{j,+}, f^{j,-} \geq 0$. Además, son medibles, porque los $E_{N;i}$ son medibles según visto en el punto 5 en la página 4.

A continuación, estudiemos:

$$\begin{aligned} \rho_N^+ f_N^{j,+} &= \left(\sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho^+(\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}} \right) \left(\sum_{k=1}^{(2N)^n} f^{j,+}(\vec{r}_{N;k}) \chi_{E_{N;k}} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{(2N)^n} \sum_{k=1}^{(2N)^n} \rho^+(\vec{r}_{N;i}) f^{j,+}(\vec{r}_{N;k}) \underbrace{\chi_{E_{N;i}} \chi_{E_{N;k}}}_{=\delta_{i,k} \chi_{E_{N;i}}} = \\ &= \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho^+(\vec{r}_{N;i}) f^{j,+}(\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}} \end{aligned}$$

donde el último paso se debe a que los términos del doble sumatorio son no nulos únicamente cuando $i = k$. Cuando es $i = k$ se da $\chi_{E_{N;k}} = \chi_{E_{N;i}} \Rightarrow \chi_{E_{N;i}} \chi_{E_{N;k}} = (\chi_{E_{N;i}})^2 = \chi_{E_{N;i}}$ pues los únicos valores

que toma $\chi_{E_{N;i}}$ son 1 y 0 y ambos cumplen $1^2 = 1$ y $0^2 = 0$. Nótese que la función obtenida, es a su vez, una función simple. Actuando de forma análoga para el resto de combinaciones, llegamos a:

$$\rho_N^- f_N^{j,+} = \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho^- (\vec{r}_{N;i}) f^{j,+} (\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}}$$

$$\rho_N^+ f_N^{j,-} = \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho^+ (\vec{r}_{N;i}) f^{j,-} (\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}}$$

$$\rho_N^- f_N^{j,-} = \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho^- (\vec{r}_{N;i}) f^{j,-} (\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}}$$

que también son funciones simples.

Por último, consideremos:

$$\begin{aligned} & \rho_N^+ f_N^{j,+} - \rho_N^- f_N^{j,+} - \rho_N^+ f_N^{j,-} + \rho_N^- f_N^{j,-} = \\ &= \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho^+ (\vec{r}_{N;i}) f^{j,+} (\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}} - \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho^- (\vec{r}_{N;i}) f^{j,+} (\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}} + \\ & \quad - \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho^+ (\vec{r}_{N;i}) f^{j,-} (\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}} + \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho^- (\vec{r}_{N;i}) f^{j,-} (\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}} = \\ &= \sum_{i=1}^{(2N)^n} [\rho^+ (\vec{r}_{N;i}) f^{j,+} (\vec{r}_{N;i}) - \rho^- (\vec{r}_{N;i}) f^{j,+} (\vec{r}_{N;i}) + \\ & \quad - \rho^+ (\vec{r}_{N;i}) f^{j,-} (\vec{r}_{N;i}) + \rho^- (\vec{r}_{N;i}) f^{j,-} (\vec{r}_{N;i})] \chi_{E_{N;i}} = \\ &= \sum_{i=1}^{(2N)^n} [\rho^+ (\vec{r}_{N;i}) - \rho^- (\vec{r}_{N;i})] [f^{j,+} (\vec{r}_{N;i}) - f^{j,-} (\vec{r}_{N;i})] \chi_{E_{N;i}} = \\ &= \sum_{i=1}^{(2N)^n} \left[\underbrace{(\rho^+ - \rho^-)}_{=\rho} (\vec{r}_{N;i}) \right] \left[\underbrace{(f^{j,+} - f^{j,-})}_{=f^j} (\vec{r}_{N;i}) \right] \chi_{E_{N;i}} = \\ &= \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho (\vec{r}_{N;i}) f^j (\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}} \end{aligned}$$

Haciendo la integral en W a ambos lados y aplicando que la integral es lineal, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_W \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho (\vec{r}_{N;i}) f^j (\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}} &= \int_W (\rho_N^+ f_N^{j,+} - \rho_N^- f_N^{j,+} - \rho_N^+ f_N^{j,-} + \rho_N^- f_N^{j,-}) = \\ &= \int_W \rho_N^+ f^{j,+} - \int_W \rho_N^- f^{j,+} - \int_W \rho_N^+ f^{j,-} + \int_W \rho_N^- f^{j,-} \end{aligned}$$

12. Aplicando la definición de integral de una función simple, obtenemos que:

$$\int_W \rho_N^+ f_N^{j,+} = \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho^+ (\vec{r}_{N;i}) f^{j,+} (\vec{r}_{N;i}) \text{me}(E_{N;i})$$

$$\int_W \rho_N^- f_N^{j,+} = \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho^- (\vec{r}_{N;i}) f^{j,+} (\vec{r}_{N;i}) \text{me}(E_{N;i})$$

$$\int_W \rho_N^+ f_N^{j,-} = \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho^+ (\vec{r}_{N;i}) f^{j,-} (\vec{r}_{N;i}) \text{me}(E_{N;i})$$

$$\int_W \rho_N^- f_N^{j,-} = \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho^- (\vec{r}_{N;i}) f^{j,-} (\vec{r}_{N;i}) \text{me}(E_{N;i})$$

Por el punto 10 en la página 4, tenemos:

$$\begin{aligned} & \int_W \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho (\vec{r}_{N;i}) f^j (\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}} = \\ &= \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho^+ (\vec{r}_{N;i}) f^{j,+} (\vec{r}_{N;i}) \text{me}(E_{N;i}) - \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho^- (\vec{r}_{N;i}) f^{j,+} (\vec{r}_{N;i}) \text{me}(E_{N;i}) + \\ & - \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho^+ (\vec{r}_{N;i}) f^{j,-} (\vec{r}_{N;i}) \text{me}(E_{N;i}) + \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho^- (\vec{r}_{N;i}) f^{j,-} (\vec{r}_{N;i}) \text{me}(E_{N;i}) = \\ &= \sum_{i=1}^{(2N)^n} [\rho^+ (\vec{r}_{N;i}) f^{j,+} (\vec{r}_{N;i}) - \rho^- (\vec{r}_{N;i}) f^{j,+} (\vec{r}_{N;i}) + \\ & - \rho^+ (\vec{r}_{N;i}) f^{j,-} (\vec{r}_{N;i}) + \rho^- (\vec{r}_{N;i}) f^{j,-} (\vec{r}_{N;i})] \text{me}(E_{N;i}) = \\ &= \sum_{i=1}^{(2N)^n} [\rho^+ (\vec{r}_{N;i}) - \rho^- (\vec{r}_{N;i})] [f^{j,+} (\vec{r}_{N;i}) - f^{j,-} (\vec{r}_{N;i})] \text{me}(E_{N;i}) = \\ &= \sum_{i=1}^{(2N)^n} \left[\underbrace{(\rho^+ - \rho^-)}_{=\rho} (\vec{r}_{N;i}) \right] \left[\underbrace{(f^{j,+} - f^{j,-})}_{=f^j} (\vec{r}_{N;i}) \right] \text{me}(E_{N;i}) = \\ &= \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho (\vec{r}_{N;i}) f^j (\vec{r}_{N;i}) \text{me}(E_{N;i}) \end{aligned}$$

Llamando:

$$m_{N;i} := \rho (\vec{r}_{N;i}) \text{me}(E_{N;i}) \quad \forall i = 1, \dots, (2N)^n \wedge \forall N \in \mathbb{N}$$

obtenemos:

$$\int_W \sum_{i=1}^{(2N)^n} \rho (\vec{r}_{N;i}) f^j (\vec{r}_{N;i}) \chi_{E_{N;i}} = \sum_{i=1}^{(2N)^n} m_{N;i} f^j (\vec{r}_{N;i})$$

13. Sustituyendo lo hallado en el punto 11 en la página 4 en la expresión del punto 9 en la página 4, llegamos a:

$$\begin{aligned} \int_W g &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \hat{x}_j \sum_{i=1}^{(2N)^n} m_{N;i} f^j (\vec{r}_{N;i}) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^n} m_{N;i} \underbrace{\left[\sum_{j=1}^n f^j (\vec{r}_{N;i}) \hat{x}_j \right]}_{=f(\vec{r}_{N;i})} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^n} m_{N;i} f (\vec{r}_{N;i}) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Otro concepto que vamos a usar es el centro de masas (C.D.M).

Definición 1. Sea S un sistema de N partículas y sean $\{\vec{r}_i\}_{i=1}^N$ las posiciones de dichas partículas según un observador O . Llamamos **posición del centro de masas** \vec{R} a la media ponderada (a través de las masas) de las posiciones de cada una de las partículas:

$$\vec{R} := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

siendo $M = \sum_{i=1}^N m_i$ la masa total.

Corolario 1. Sea $V \subseteq \mathbb{R}^3$ una distribución volumétrica continua de masa dada mediante una función densidad $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$. La posición de su centro de masas \vec{R} viene dada por:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \iiint_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV$$

$$\text{donde } M = \iiint_V \rho(\vec{r}) dV.$$

Demostración. Partimos de lo que queremos demostrar:

$$\frac{1}{M} \iiint_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV = \frac{\iiint_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV}{\iiint_V \rho(\vec{r}) dV}$$

Tomando $f = id$ para el numerador y $f = 1$ para el denominador, por el teorema 1 en la página 3 (siendo en nuestro caso $n = 3$), sabemos que existen sucesiones $\{m_{N,i}\}_{i=1}^{(2N)^3}$ y $\{\vec{r}_{N,i}\}_{i=1}^{(2N)^3}$ tales que podemos escribir lo anterior como:

$$\frac{1}{M} \iiint_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV = \frac{\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^3} m_{N,i} \vec{r}_{N,i}}{\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^3} m_{N,i}}$$

Como es $\iiint_V \rho(\vec{r}) dV \neq 0$, el denominador de la expresión anterior será distinto de cero. Así, el cociente de los límites es el límite del cociente:

$$\frac{1}{M} \iiint_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{(2N)^3} m_{N,i} \vec{r}_{N,i}}{\sum_{i=1}^{(2N)^3} m_{N,i}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \vec{R}$$

Y lo anterior es justo la expresión dada en la definición 1 para el centro de masas de un sistema de $(2N)^3$ partículas.

Q.E.D.

1.2. Momento lineal y momento del centro de masas

Definición 2. Sea S un sistema de N partículas. Llamamos **momento lineal** de la partícula i -ésima \vec{p}_i al producto de la masa de la partícula i -ésima por su vector velocidad.

$$\vec{p}_i := m_i \dot{\vec{r}}_i$$

Definición 3. Sea S un sistema de N partículas. Llamamos **momento lineal total** a la suma de los momentos lineales de cada una de las partículas que forman S :

$$\vec{P} := \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

Corolario 2. Sea S un sistema de N partículas. Podemos expresar el momento lineal total del sistema como:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i$$

Demostración. El resultado se obtiene trivialmente al aplicar la definición 2 en la definición 3. Q.E.D.

Proposición 1. Sea S un sistema de N partículas tal que la masa de sus partículas no varía en el tiempo. El momento lineal total del sistema puede calcularse como el producto de la masa total del sistema por la velocidad del centro de masas.

$$\vec{P} = M \dot{\vec{R}}$$

Demostración. Partimos de la expresión $M \dot{\vec{R}}$. Por la definición 1 en la página anterior, tenemos que:

$$M \dot{\vec{R}} = M \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right)$$

Como las masas no varían con el tiempo, obtenemos:

$$M \dot{\vec{R}} = M \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i$$

Y, por la definición 3, tenemos:

$$M \dot{\vec{R}} = \vec{P}$$

Q.E.D.

Observación 2. La proposición 1 nos dice que el momento lineal de todo un sistema de partículas S es el momento lineal que tendría una única partícula de masa M que se mueve tal y como se desplaza el centro de masas del sistema. Por tanto, si no nos interesa cómo cambia la posición relativa de las partículas del sistema S , podemos tratar dicho sistema de partículas como si fuese una única partícula. Esto lo hacemos, por ejemplo, cuando estudiamos movimientos planetarios, pues suponemos que un planeta es un único cuerpo.

1.2.1. Variación del momento lineal

Teorema 2 (2^a ley de Newton para un sistema de partículas). *Sea S un sistema de N partículas tal que la masa de sus partículas no varía en el tiempo. La variación con respecto al tiempo del momento lineal total $\dot{\vec{P}}$ del sistema S es igual a la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre cada una de las partículas. Además, $\dot{\vec{P}}$ coincide con la variación del momento lineal de una única masa puntual M sometida a una aceleración \vec{R} , siendo \vec{R} la aceleración del centro de masas.*

$$\dot{\vec{P}} = M\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

Demostración. Derivando con respecto al tiempo a ambos lados de la definición 3 en la página anterior, obtenemos:

$$\dot{\vec{P}} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \right)$$

Ahora, como la derivada es lineal:

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \dot{\vec{r}}_i)$$

Como la masa de cada partícula no cambia con el tiempo:

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \quad (1.2.1)$$

Por otra parte, por la segunda ley de Newton, el término $m_i \ddot{\vec{r}}_i$ es la fuerza resultante (neta) sobre la partícula i -ésima y puede obtenerse como:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i \quad (1.2.2)$$

donde el primer sumando es la fuerza resultante sobre la partícula i -ésima debida a las fuerzas internas y el segundo sumando es la fuerza resultante sobre la partícula i -ésima debido a las fuerzas externas. Sustituyendo la ecuación 1.2.2 en la ecuación 1.2.1, obtenemos:

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i \right] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

Por la tercera ley de Newton, las fuerzas internas se irán igualando a pares $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \forall i, j = 1, \dots, N$. Esto va a hacer que el primer sumatorio de la expresión de $\dot{\vec{P}}$ se anule, pues para cada par i, j tenemos dos fuerzas que son iguales y de sentido contrario. Veámoslo:

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

Por la tercera ley de Newton, es $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij} \forall i, j = 1, \dots, N$. En consecuencia:

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N (\vec{F}_{ij} - \vec{F}_{ij}) + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

Por último, derivando dos veces la definición 1 en la página 16, llegamos a:

$$\ddot{\vec{R}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i = M \ddot{\vec{R}}$$

Sustituyendo en la ecuación 1.2.1 en la página anterior, obtenemos:

$$\dot{\vec{P}} = M \ddot{\vec{R}}$$

Q.E.D.

Observación 3. El teorema 2 en la página anterior constituye la segunda ley de Newton para un sistema de partículas. Éste nos dice que sólo las fuerzas externas pueden variar el momento lineal total; es decir, las fuerzas internas jamás podrán generar una aceleración del centro de masas.

Por otra parte, el teorema citado nos indica que podemos aplicar la segunda ley de Newton al centro de masas; es decir, podemos considerar el sistema como una partícula puntual.

1.2.2. Sistemas de partículas aisladas

Definición 4. Diremos que un sistema de N partículas está **aislado** si no hay resultante de fuerza externas, en otras palabras, si las partículas únicamente están sometidas a fuerzas internas.

Corolario 3 (Conservación del momento lineal para un sistema de partículas). *El momento lineal total \vec{P} de un sistema de partículas de masa constante aislado permanece constante.*

$$\vec{P} = \vec{\text{cte}}$$

Demostración. Llamemos N al número de partículas de nuestro sistema aislado. Por el teorema 2 en la página anterior, tenemos:

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

Como, por hipótesis, nuestro sistema de partículas está aislado, es $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{0}$ y, en consecuencia:

$$\dot{\vec{P}} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P} = \vec{\text{cte}}$$

Q.E.D.

1.2.3. Sistema de referencia centro de masas

En distintos escenarios, puede interesarnos describir un sistema de partículas desde un observador situado en el centro de masas de dicho sistema, para lo cual hablaremos de la posición relativa respecto al centro de masas.

Notación 2. Sea S un sistema de N partículas. Denotaremos con superíndice $*$ a aquellas magnitudes medidas desde el sistema de referencia centro de masas del sistema S . En particular, denotaremos con \vec{r}_i^* a la posición de la partícula i -ésima con respecto al centro de masas de S .

Proposición 2. *Sean \mathcal{R} un sistema de referencia inercial cualquiera y S un sistema de N partículas. Si llamamos \vec{r}_i a la posición de la partícula i -ésima según \mathcal{R} y \vec{R} a la posición del centro de masas del sistema S según \mathcal{R} , entonces la posición de la partícula i -ésima vista desde el centro de masas viene dada por:*

$$\vec{r}_i^* = \vec{r}_i - \vec{R}$$

Demostración. Claramente, tenemos:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i^* \Leftrightarrow \vec{r}_i^* = \vec{r}_i - \vec{R}$$

Q.E.D.

Proposición 3. *Sea S un sistema de N partículas. El momento lineal total del sistema visto desde el centro de masas es nulo.*

$$\vec{P}^* = \vec{0}$$

Demostración. Por la definición 3 en la página 17, tenemos:

$$\vec{P}^* = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^*$$

Por la proposición 2 en la página anterior, podemos expresar lo anterior como:

$$\vec{P}^* = \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{R}}) = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i - M \dot{\vec{R}} = \vec{P} - M \dot{\vec{R}}$$

Aplicando la proposición 1 en la página 17, llegamos a:

$$\vec{P}^* = \vec{P} - \vec{P} = \vec{0}$$

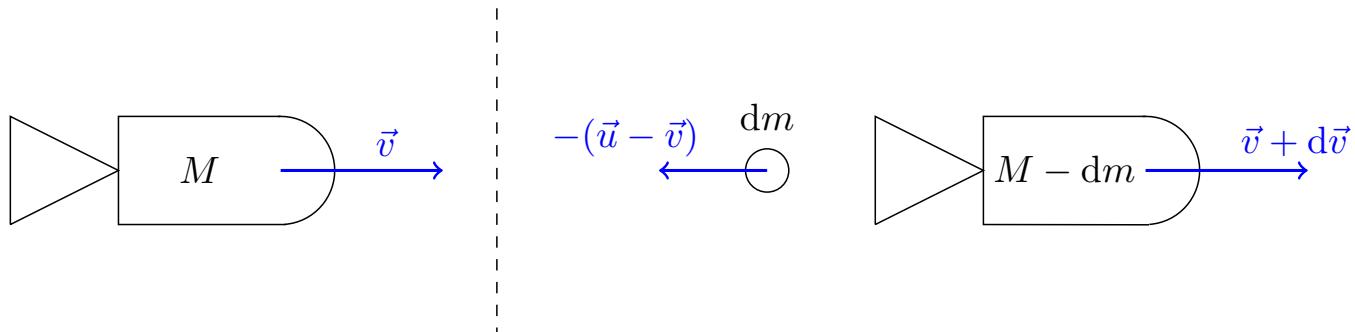
Q.E.D.

Observación 4. La proposición 3 es un resultado lógico. Si hemos dicho que el sistema de partículas se mueve como una única partícula situada en el centro de masas, desde el centro de masas no deberíamos ver ningún momento lineal.

Ejemplo 1 (Sistemas de masa variable). Nos referimos a sistemas cuya masa va variando con el tiempo, por ejemplo, un cohete. Si un cohete suelta un dm en un instante dt ; entonces, por conservación del momento lineal, el cohete se moverá en sentido opuesto al sentido en el cual hemos lanzado el dm .

Vamos a suponer un cohete que está inicialmente en reposo (reposo no significa que esté quieto, únicamente que no actúa sobre él aceleración alguna). Supongamos que el cohete expulsa masa con velocidad relativa \vec{u} . De momento, no nos preocupamos por el ritmo con el que se eyecta la masa. Para simplificar, supondremos que no hay fuerzas externas (despreciamos la gravedad). Si la masa inicial del cohete es M_0 y su velocidad inicial es v_0 , ¿cuál es la velocidad que se alcanza cuando la masa del cohete ha descendido hasta un valor M ? Es decir, queremos hallar la velocidad del cohete en función de la masa que nos queda.

Inicialmente, tenemos que nuestro cohete tiene una cierta velocidad v y una cierta masa M . Posteriormente, se habrá eyectado un dm de masa que tendrá velocidad $-(\vec{u} - \vec{v})$ visto desde un observador inercial y el cohete tendrá velocidad $v + dv$.



Así, por el corolario 3 en la página 19:

$$\begin{aligned} \#\vec{F}_{ext} \Rightarrow \vec{P} = \vec{\text{cte}} \Rightarrow P_{antes} = P_{después} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Mv = dm(v - u) + (M - dm)(v + dv) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Mv = vdm - udm + Mv - vdm + Mdv - dmdv \Leftrightarrow -udm + Mdv - dmdv = 0 \end{aligned}$$

Despreciamos diferenciales de segundo orden $dmdv \approx 0$, obteniendo:

$$Mdv = udm$$

Por otra parte, la masa que expulsa el cohete dm es la masa que pierde el cohete dM . Por consiguiente $dM = -dm$, de forma que:

$$Mdv = -udM$$

Y la ecuación diferencial anterior es susceptible de resolverse por integración directa:

$$\begin{aligned} Mdv = -udM \Leftrightarrow \frac{dv}{u} = -\frac{dM}{M} \Leftrightarrow \int_{v_0}^v \frac{d\nu}{u} = -\int_{M_0}^M \frac{d\mu}{\mu} \Leftrightarrow \left[\frac{\nu}{u} \right]_0^v = -[\ln \mu]_{M_0}^M \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{v - v_0}{u} = -\ln \frac{M}{M_0} \Leftrightarrow v = -u \ln \frac{M}{M_0} + v_0 \end{aligned}$$

Si lo que queremos obtener es la masa en función de la velocidad, obtenemos:

$$-\frac{v - v_0}{u} = \ln \frac{M}{M_0} \Leftrightarrow \frac{M}{M_0} = e^{-\frac{v - v_0}{u}} \Leftrightarrow M = M_0 e^{-\frac{v - v_0}{u}} = M_0 e^{-\frac{\Delta v}{u}}$$

Nótese que los resultados anteriores no son función de $\frac{dm}{dt}$.

Q.E.F.

1.3. Momento Angular

Definición 5. Sean S un sistema de N partículas y $O \in \mathbb{R}^3$ un punto cualquiera del espacio. Llamamos **momento angular** \vec{J}_i de la partícula i -ésima **con respecto al punto** O al producto vectorial de la posición de la partícula i -ésima \vec{r}_i según O y su momento lineal \vec{p}_i , también según O .

$$\vec{J}_i := \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Observación 5. Recordemos que a la hora de trabajar con el momento angular es importante dónde se encuentra nuestro origen de coordenadas. Es más, el momento angular no es una propiedad de un sistema de partículas, sino que es una propiedad del conjunto formado por un observador concreto y un sistema de partículas.

Corolario 4. *Sea S un sistema de N partículas. Podemos expresar el momento angular de la partícula i -ésima respecto al punto O como:*

$$\vec{J}_i = m\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$$

donde \vec{r}_i y $\dot{\vec{r}}_i$ vienen dadas según O .

Demostración. Partimos de la definición 5 en la página anterior:

$$\vec{J}_i := \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Por la definición 2 en la página 17, tenemos:

$$\vec{J}_i = \vec{r}_i \times (m_i \dot{\vec{r}}_i) = m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$$

Q.E.D.

Definición 6. Sean S un sistema de N partículas y $O \in \mathbb{R}^3$ un punto cualquiera del espacio. Llamamos **momento angular total** \vec{J} del sistema S respecto al punto O a la suma de los momentos angulares respecto de O de cada una de las partículas de S .

$$\vec{J} := \sum_{i=1}^N \vec{J}_i$$

Corolario 5. *Sea S un sistema de N partículas. Podemos expresar el momento angular total de S respecto de O como:*

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$$

Demostración. El resultado se sigue trivialmente al aplicar el corolario 4 en la página anterior en la definición 6.

Q.E.D.

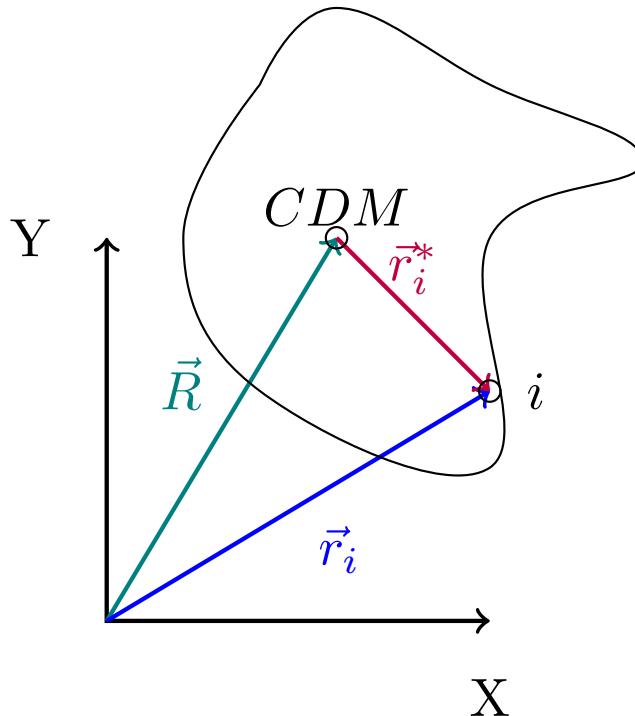
Proposición 4. *Sea S un sistema de N partículas tal que la masa de sus partículas no varía en el tiempo. El momento angular total de S respecto a un punto $O \in \mathbb{R}^3$ es susceptible de expresarse como la suma del momento angular total de S respecto a su centro de masas y el momento angular que tendría una partícula de masa $M = \sum_{i=1}^N m_i$ situada en el centro de masas \vec{R} y que se moviera con la velocidad del centro de masas $\dot{\vec{R}}$ respecto al punto O . Es decir:*

$$\vec{J} = \vec{J}^* + \vec{J}_{C.D.M.}$$

siendo:

$$\vec{J}^* = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i^* \times m_i \dot{\vec{r}}_i^*$$

$$\vec{J}_{C.D.M.} = M \vec{R} \times \dot{\vec{R}}$$



Demostración. Partimos de:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i^* + \vec{R} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i^* + \dot{\vec{R}}$$

pues la derivada es lineal. Sustituyendo en el corolario 5 en la página anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i^* + \vec{R}) \times (\dot{\vec{r}}_i^* + \dot{\vec{R}}) = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{r}_i^* \times \dot{\vec{r}}_i^* + \vec{r}_i^* \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \dot{\vec{r}}_i^* + \vec{R} \times \dot{\vec{R}}] = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^* \times \dot{\vec{r}}_i^* + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^* \times \dot{\vec{R}} + \sum_{i=1}^N \vec{R} \times m_i \dot{\vec{r}}_i^* + \sum_{i=1}^N m_i \vec{R} \times \dot{\vec{R}} \end{aligned}$$

Como el producto vectorial es distributivo respecto a la suma y \vec{R} y $\dot{\vec{R}}$ no dependen de i , podemos reescribir lo anterior como:

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^* \times \dot{\vec{r}}_i^* + \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^* \right) \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^* \right) + \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \vec{R} \times \dot{\vec{R}} \quad (1.3.1)$$

Por otra parte, por la definición 1 en la página 16, tenemos:

$$\vec{R}^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^* \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^* = M \vec{R}^* = \vec{0} \quad (1.3.2)$$

pues, trivialmente, la posición del centro de masas con respecto al centro de masas \vec{R}^* es nula. Además, como la masa de cada partícula permanece constante en el tiempo:

$$\vec{R}^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^* \Rightarrow \dot{\vec{R}}^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^* \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^* = M \dot{\vec{R}}^* = \vec{0} \quad (1.3.3)$$

ya que, trivialmente, la velocidad del centro de masas desde el punto de vista del centro de masas es nula.

En consecuencia, aplicando las ecuaciones 1.3.2 en la página anterior y 1.3.3 en la página anterior en 1.3.1 en la página anterior, llegamos a:

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^* \times \dot{\vec{r}}_i^* + \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \vec{R} \times \dot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^* \times \dot{\vec{r}}_i^* + M \vec{R} \times \dot{\vec{R}}$$

Aplicando el corolario 5 en la página 22, sabemos que el primer sumando de la expresión anterior se corresponde con el momento angular del sistema S con respecto al centro de masas \vec{J}^* , mientras que el segundo término es el momento angular con respecto de O que tendría una partícula de masa M situada en el centro de masas de S y que se desplazara a la velocidad del centro de masas de S . Así, obtenemos:

$$\vec{J} = \vec{J}^* + \vec{J}_{C.D.M.}$$

Q.E.D.

1.3.1. Variación del momento angular

Definición 7. Sean S un sistema de N partículas y $O \in \mathbb{R}^3$ un punto cualquiera del espacio. Llamamos **momento de fuerzas o torque** de la partícula i -ésima \vec{N}_i **con respecto de O** al producto vectorial del vector posición de la partícula i -ésima con respecto de O y la fuerza resultante que actúa sobre la partícula i -ésima.

$$\vec{N}_i := \vec{r}_i \times \vec{F}_{res,i}$$

Definición 8. Sean S un sistema de N partículas y $O \in \mathbb{R}^3$ un punto cualquiera del espacio. Llamamos **momento de fuerzas total \vec{N}** del sistema S respecto al punto O a la suma de los momentos de fuerzas respecto de O de cada una de las partículas de S .

$$\vec{N} := \sum_{i=1}^N \vec{N}_i$$

Corolario 6. Sean S un sistema de N partículas y $O \in \mathbb{R}^3$ un punto cualquiera del espacio. Podemos expresar el momento de fuerzas total de S respecto de O como:

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{res,i} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

donde recordamos que \vec{F}_{ij} representa la fuerza interna que realiza la partícula j -ésima sobre la i -ésima y \vec{F}_i representa la fuerza externa que se ejerce sobre la partícula i -ésima.

Demostración. Se llega al resultado al sustituir la definición 7 en 8 y al tener en cuenta:

$$\vec{F}_{res,i} = \sum_{j=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i$$

Es decir, usando que la fuerza resultante que actúa sobre la partícula i -ésima tiene una componente de fuerzas internas (que se puede obtener como la suma de las fuerzas que ejercen el resto de partículas del sistema sobre la partícula i -ésima) y una componente de fuerzas externas \vec{F}_i .

Q.E.D.

Proposición 5. *Sea S un sistema de N partículas tal que la masa de sus partículas no varía en el tiempo. La variación del momento angular total de S según un punto $O \in \mathbb{R}^3$ con respecto al tiempo coincide con el momento de fuerzas total del sistema respecto del punto O .*

$$\dot{\vec{J}} = \vec{N} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Demostración. Partimos del corolario 5 en la página 22:

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$$

Derivando a ambos lados, obtenemos:

$$\dot{\vec{J}} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \right)$$

Como la derivada es lineal:

$$\dot{\vec{J}} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \right)$$

Como la masa de cada partícula no varía con el tiempo, aplicando la regla del producto, obtenemos:

$$\dot{\vec{J}} = \sum_{i=1}^N m_i \underbrace{\dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i}_{=0} + \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \times \ddot{\vec{r}}_i$$

donde el primer término se anula porque el producto vectorial de un vector por sí mismo es nulo. Reescribiendo la expresión anterior llegamos a:

$$\dot{\vec{J}} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \times (m_i \ddot{\vec{r}}_i)$$

Por la segunda ley de Newton el término entre paréntesis es la resultante de todas las fuerzas (internas y externas) que actúan sobre la partícula i -ésima. Así, tenemos:

$$\dot{\vec{J}} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \times \vec{F}_{res,i}$$

Aplicando la definición 7 en la página anterior, obtenemos:

$$\dot{\vec{J}} = \sum_{i=1}^N \vec{N}_i$$

Por ende, por la definición 8 en la página anterior, llegamos a:

$$\dot{\vec{J}} = \vec{N}$$

Por último, haciendo uso del corolario 6 en la página anterior, obtenemos:

$$\dot{\vec{J}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Q.E.D.

Definición 9. Decimos que una fuerza es **central** cuando siempre está dirigida hacia un punto $O \in \mathbb{R}^3$ llamado centro del movimiento. Es decir, sea \vec{R} cualquier punto de \mathbb{R}^3 , entonces:

$$\vec{F} \text{ es central} \Leftrightarrow \vec{F}(\vec{R}) = \mathfrak{F}! \left(\left| \vec{R} \vec{O} \right| \right)$$

Teorema 3 (Teorema de conservación del momento angular). *Sea S un sistema de N partículas tal que la masa de sus partículas no varía en el tiempo. Si todas las fuerzas internas son centrales, entonces la variación del momento angular \vec{J} del sistema S con respecto de $O \in \mathbb{R}^3$ coincide con el momento de fuerzas resultante de las fuerzas **externas** que actúan sobre S respecto del punto O . Es decir:*

$$\dot{\vec{J}} = \vec{N}_{ext} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Demostración. Como la masa de las partículas que forman S no varía con el tiempo, podemos aplicar la proposición 5 en la página anterior, obteniendo:

$$\dot{\vec{J}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Consideremos el primer sumando:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \right)$$

Por la tercera ley de Newton, tenemos que $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. Sustituyendo, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times (-\vec{F}_{ij}) \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}$$

Nótese que $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ es el vector que nace en la partícula j -ésima y muere en la partícula i -ésima. Como las fuerzas internas son centrales (por hipótesis), por la definición 9, \vec{F}_{ij} irá en la dirección que une las partículas i -ésima y j -ésima, es decir, será $\vec{F}_{ij} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j$. En consecuencia, como el producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo, obtenemos:

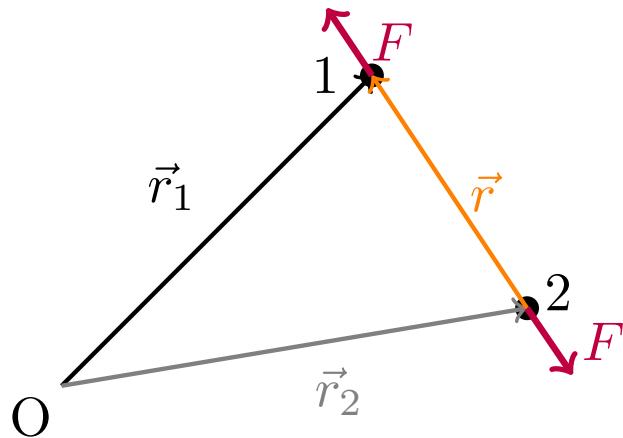
$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = \vec{0}$$

Sustituyendo el resultado anterior en el enunciado de la proposición 5 en la página anterior, llegamos a:

$$\dot{\vec{J}} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{N}_{ext,i} = \vec{N}_{ext}$$

pues recordamos que \vec{F}_i era la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre la partícula i -ésima. $\mathbb{Q.E.D.}$

Ejemplo 2. Veamos lo que quiere decir el teorema 3 con un sistema de dos partículas 1 y 2.



Podemos definir un vector que indique la posición de una partícula con respecto de la otra. Llamaremos a dicho vector $\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Estas dos partículas podrán interactuar entre sí de alguna forma, es decir, habrá fuerzas internas. Imaginemos que la partícula 2 ejerce una fuerza repulsiva sobre la partícula 1 en la dirección de \vec{r} . Por la tercera ley de Newton, la partícula 1 ejercerá una fuerza en la misma dirección, pero en sentido contrario. Llamaremos $\vec{F} := \vec{F}_{12}$. Por tanto, por la tercera ley de Newton, $\vec{F} = -\vec{F}_{21}$. Bien, vamos a introducir todo esto en la expresión para la variación de \vec{J} . ¿Pueden las fuerzas internas cambiar el momento angular? Ahora lo veremos. Para nuestro sistema de dos partículas, se tiene:

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} = \vec{r}_1 \times \vec{F} - \vec{r}_2 \times \vec{F} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Sólo en el caso de fuerzas **centrales**, el producto vectorial $\vec{r} \times \vec{F}$ se anula. Es decir, en general, las fuerzas internas sí que generan momento angular. Sin embargo, si las fuerzas son centrales ($\vec{F} \parallel \vec{r}$), entonces, el producto vectorial anterior se anula y las fuerzas internas no crean momento angular.

Corolario 7. *Sea S un sistema de N partículas tal que la masa de sus partículas no varía en el tiempo. Si todas las fuerzas (tanto internas como externas) que actúan sobre las partículas del sistema son centrales, entonces el momento angular total del sistema S con respecto de cualquier punto $O \in \mathbb{R}^3$ se conserva: $\vec{J} = \vec{c}\vec{t}$.*

En particular, si no hay fuerzas externas y las fuerzas internas son centrales, el momento angular se conserva.

Demostración. Como las fuerzas internas de nuestro sistema son centrales por hipótesis (al serlo todas las fuerzas), podemos aplicar el teorema 3 en la página anterior, obteniendo:

$$\dot{\vec{J}} = \vec{N}_{ext} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Ahora bien, por la definición 9 en la página anterior, como todas las fuerzas son centrales, será $\vec{F}_i \parallel \vec{r}_i$ y, en consecuencia, será $\vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0} \forall i = 1, \dots, N$. Así:

$$\dot{\vec{J}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{J} = \vec{c}\vec{t}$$

En particular, $\vec{F} = \vec{0}$ es una fuerza central, pues $\vec{0} \parallel \vec{v} \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Por tanto, si no hay fuerzas externas $\vec{F}_i = \vec{0} \forall i = 1, \dots, N$, las fuerzas externas son centrales y se cumple el enunciado del corolario. $\mathbb{Q.E.D.}$

Proposición 6. *Sea S un sistema de N partículas tal que la masa de sus partículas no varía en el tiempo. Si todas las fuerzas internas del sistema S son centrales, la variación con respecto al tiempo del momento angular*

\vec{J}^* según el centro de masas coincide con el momento de fuerzas resultante de todas las fuerzas externas visto desde el sistema de referencia centro de masas. En otras palabras:

$$\dot{\vec{J}}^* = N^* = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i^* \times \vec{F}_i$$

Demostración. Sea O el origen de un sistema de referencia inercial. Por el teorema 3 en la página 26, tenemos que debe cumplirse:

$$\dot{\vec{J}} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Por la proposición 2 en la página 19, tenemos:

$$\vec{r}_i^* = \vec{r}_i - \vec{R} \Leftrightarrow \vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i^*$$

Sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos:

$$\dot{\vec{J}} = \sum_{i=1}^N (\vec{R} + \vec{r}_i^*) \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{R} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i^* \times \vec{F}_i = \vec{R} \times \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right) + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i^* \times \vec{F}_i \quad (1.3.4)$$

donde hemos podido intercambiar la suma con el producto vectorial, pues éste es distributivo con respecto a la suma.

Por otra parte, por la proposición 4 en la página 22:

$$\begin{aligned} \vec{J} = \vec{J}^* + M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} \Leftrightarrow \vec{J}^* = \vec{J} - M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{\vec{J}}^* = \dot{\vec{J}} - \left(M \underbrace{\dot{\vec{R}} \times \dot{\vec{R}}}_{=0} + M\vec{R} \times \ddot{\vec{R}} \right) = \dot{\vec{J}} - M\vec{R} \times \ddot{\vec{R}} = \dot{\vec{J}} - \vec{R} \times (M\ddot{\vec{R}}) \end{aligned}$$

donde el término marcado se anula pues el producto vectorial de un vector por sí mismo es nulo. Por la segunda ley de Newton para un sistema de partículas (ver teorema 2 en la página 18), tenemos:

$$\dot{\vec{J}}^* = \dot{\vec{J}} - \vec{R} \times \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right)$$

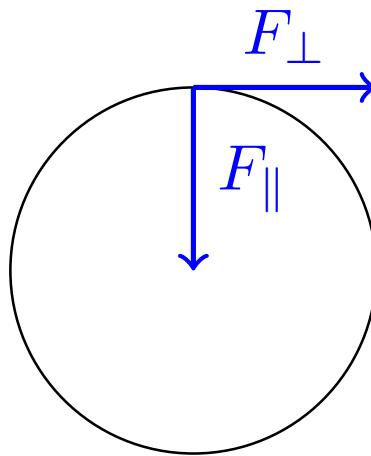
Sustituyendo el valor hallado de $\dot{\vec{J}}$ en la ecuación 1.3.4, llegamos a:

$$\dot{\vec{J}}^* = \vec{R} \times \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right) + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i^* \times \vec{F}_i - \vec{R} \times \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right) = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i^* \times \vec{F}_i$$

Q.E.D.

Observación 6. La proposición 6 en la página anterior nos está indicando que el momento angular desde el centro de masas sólo puede variar si existe un momento de fuerzas desde el centro de masas. En general, podremos ignorar el movimiento del centro de masas, aunque el observador del centro de masas no sea inercial.

Ejemplo 3. Sea O nuestro origen de coordenadas. Tenemos un disco de radio r cuyo centro es O . Hacemos una fuerza en un punto del disco. Dicha fuerza es susceptible de ser descompuesta en dos componentes \vec{F}_{\parallel} y \vec{F}_{\perp} , una componente paralela a la dirección radial \vec{F}_{\parallel} y otra perpendicular \vec{F}_{\perp} .



La componente paralela es una fuerza central y, en consecuencia, no provoca variación del momento angular.

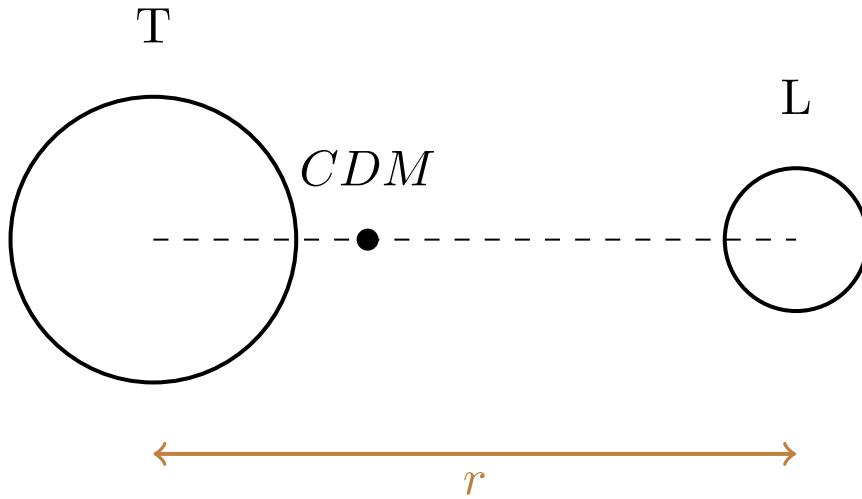
$$\vec{r} \times \vec{F}_{\parallel} = \vec{0} \Rightarrow \text{No cambia } \vec{J}$$

Sin embargo, la componente perpendicular a la dirección radial sí que general variación del momento angular.

$$\vec{r} \times \vec{F}_{\perp} \neq \vec{0} \Rightarrow \text{Sí cambia } \vec{J}$$

Como podemos ver, la única componente que es capaz de crear un torque es la componente tangencial de la fuerza.

Ejemplo 4 (Sistema Tierra-Luna). Vamos a suponer que los planetas son sólidos rígidos y que son puntuales. Ambas aproximaciones son, evidentemente, falsas. En cualquier caso, tenemos la siguiente situación:



Tomamos nuestra referencia O en un punto cualquiera del espacio, entonces, por la proposición 4 en la página 22, tenemos:

$$\vec{J}^* = \frac{M_T M_L}{M} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} + \vec{J}_T^* + \vec{J}_L^*$$

donde el primer factor del primer sumando es la masa reducida μ del sistema Tierra-Luna y los segundos sumandos se deben a la rotación de la Tierra en torno a sí misma y a la rotación de la Luna en torno a sí

misma. Como la fuerza externa que tenemos (la debida al Sol) es central, podremos decir que el momento angular anterior se conservará. Además, como la masa de la Luna es muy pequeña en comparación con la de la Tierra, podremos despreciar el último sumando de la expresión anterior.

Como hemos dicho antes, la Tierra no es un sólido rígido perfecto, pues arrastra una masa de agua y una masa de gas que son más elásticas que la propia Tierra. De esta forma, cuando la Tierra rota, va arrastrando consigo toda la masa de agua y toda la masa de gas. Por eso, tenemos una masa de forma de ovoide rotando en torno a la Tierra. Es decir, siempre hay algo de inercia y, por consiguiente, siempre hay una fricción entre la Tierra y la atmósfera y los océanos. Por tanto, siempre se va a ir disipando energía. Por consiguiente, la Tierra siempre va a ir perdiendo algo de energía cinética de rotación; es decir, ω_T decrece, luego \bar{J}_T^* también decrece. Obviamente, esto en escala de tiempo humana es difícil de ver; pero esto es fácilmente observable en escalas geológicas. Por ende, en escalas geológicas, la componente correspondiente a la rotación del sistema Tierra-Luna en torno a su centro de masas debe aumentar mientras el término de la rotación de la Tierra en torno a sí misma decrece para que el momento angular total permanezca constante. Recordemos que el momento angular total debe conservarse pues la fuerza del Sol es central. Como conclusión de todo esto, vemos que la distancia Tierra-Luna va aumentando poco a poco entre $3 \frac{\text{cm}}{\text{año}}$ y $4 \frac{\text{cm}}{\text{año}}$.

1.4. Energía de un sistema de partículas

Definición 10. Sea S un sistema de N partículas. Llamamos **energía cinética** de la partícula i -ésima al producto de la mitad de su masa por el cuadrado de su rapidez.

$$T_i := \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2$$

Definición 11. Sea S un sistema de N partículas. Llamamos **energía cinética total** del sistema S a la suma de las energías cinéticas de cada una de las partículas que forman S .

$$T := \sum_{i=1}^N T_i$$

Corolario 8. Sea S un sistema de N partículas. Podemos expresar su energía cinética total como:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2$$

Demostración. El resultado se obtiene trivialmente al aplicar la definición 10 en la definición 11. Q.E.D.

Proposición 7. Sean \mathcal{R} un sistema de referencia afín cualquiera y S un sistema de N partículas. La energía cinética total del sistema S según \mathcal{R} puede expresarse como la suma de la energía cinética del sistema S dada según el sistema de referencia centro de masas y la energía cinética que tendría una partícula de masa $M = \sum_{i=1}^N m_i$ y velocidad $\dot{\vec{R}}$. Es decir:

$$T = T^* + T_{C.D.M.}$$

donde:

$$T^* = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^{*2}$$

y:

$$T_{C.D.M.} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2$$

Demostración. Por la definición 11 en la página anterior, tenemos que según \mathcal{R} , la energía cinética del sistema es:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2$$

Por la proposición 2 en la página 19, tenemos:

$$\vec{r}_i^* = \vec{r}_i - \vec{R} \Leftrightarrow \vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i^* \Rightarrow \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i^*$$

pues la derivada es lineal. Sustituyendo lo anterior en la ecuación para T , llegamos a:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i^* \right)^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\vec{R}}^2 + \dot{\vec{r}}_i^{*2} + 2\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}_i^* \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{R}}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{*2} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} 2\dot{\vec{R}} \cdot m_i \dot{\vec{r}}_i^* = \\ &= \frac{1}{2} \dot{\vec{R}}^2 \sum_{i=1}^N m_i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{*2} + \dot{\vec{R}} \cdot \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^* \right) = \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{*2} + \dot{\vec{R}} \cdot \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^* \right) \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Notemos que:

$$\vec{0} = \dot{\vec{R}}^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^* \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^* = \vec{0}$$

pues $\dot{\vec{R}}^* = \vec{0}$ ya que el centro de masas no se desplaza según el centro de masas. Sustituyendo esto en la ecuación 1.4.1:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{*2}$$

Q.E.D.

1.4.1. Variación de la energía cinética

Proposición 8. *Sea S un sistema de N partículas tal que la masa de sus partículas no varía en el tiempo. La variación con respecto al tiempo de la energía cinética total del sistema viene dada por la expresión:*

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i$$

donde el primer sumando se corresponde con las fuerzas internas y el segundo sumando se corresponde con las fuerzas externas.

Demostración. Partimos del corolario 8 en la página anterior:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \right)$$

Como las masas de las partículas que forman parte de S no varían con el tiempo, al derivar la expresión anterior (al ser la derivada lineal), llegamos a:

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i)$$

Como el producto escalar es conmutativo, podemos reescribir \dot{T} como:

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot (m_i \ddot{\vec{r}}_i)$$

Por otra parte, por la segunda ley de Newton aplicada a la partícula i -ésima, obtenemos:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i$$

Así, sustituyendo en la expresión dada para \dot{T} , obtenemos:

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \left(\sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i \right)$$

Como el producto escalar es distributivo con respecto a la suma, obtenemos:

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i$$

Q.E.D.

Corolario 9. *Sea S un sistema de N partículas tal que la masa de sus partículas no varía en el tiempo. Si todas las fuerzas internas son perpendiculares al vector velocidad de cada partícula, es decir, $\dot{\vec{r}}_i \perp \vec{F}_{ij} \forall i, j = 1, \dots, N$; entonces la variación de energía cinética total del sistema S con respecto al tiempo se debe únicamente a la potencia generada por las fuerzas externas.*

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i$$

En particular, si $\dot{\vec{r}}_i = \vec{0} \forall i = 1, \dots, N$, entonces la energía cinética total del sistema se conserva $\dot{T} = 0$.

Demostración. Partimos de la proposición 8 en la página anterior:

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i$$

Ahora, bien, como por hipótesis es $\dot{\vec{r}}_i \perp \vec{F}_{ij} \forall i, j = 1, \dots, N$, tenemos:

$$\dot{\vec{r}}_i \perp \vec{F}_{ij} \forall i, j = 1, \dots, N \Leftrightarrow \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_{ij} = 0 \forall i, j = 1, \dots, N$$

Sustituyendo en la expresión dada por la proposición 8 en la página anterior, llegamos a:

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i$$

En particular, si $\dot{\vec{r}}_i = \vec{0} \forall i = 1, \dots, N$, se cumple $\dot{\vec{r}}_i \perp \vec{F}_{ij} \forall i, j = 1, \dots, N$, luego se da la expresión anterior. Además, como es $\dot{\vec{r}}_i = \vec{0} \forall i = 1, \dots, N$, al sustituir, obtenemos $\dot{T} = 0$. Q.E.D.

Ejemplo 5. Supongamos que tenemos un sistema de dos partículas 1 y 2. Por la tercera de ley de Newton, tenemos:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} := \vec{F}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2$$

Así:

$$\dot{\vec{r}}_1 \cdot \vec{F} - \dot{\vec{r}}_2 \cdot \vec{F} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}$$

y este término no tiene por qué anularse. De hecho, las fuerzas internas no contribuyen a \dot{T} si:

- $\dot{\vec{r}} = 0$ Ejemplo: reacción en un pivote.
- $\dot{\vec{r}} \perp \vec{F}$ Ejemplo: movimiento circular.

Proposición 9. *Sea S un sistema de N partículas tal que todas las fuerzas internas son conservativas y tal que la masa de cada una de sus partículas permanece constante en el tiempo. Entonces la variación con respecto al tiempo de la suma de la energía cinética del sistema T y el potencial de las fuerzas internas V_{int} se debe únicamente a la potencia generada por las fuerzas externas.*

$$\frac{d}{dt} (T + V_{int}) = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i$$

Demostración. Como todas las fuerzas son conservativas, sabemos que existen funciones $V_{ij} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ con Ω abierto tales que $\vec{F}_{ij} = -\nabla V_{ij} = -\frac{dV_{ij}}{d\vec{r}_i} \quad \forall i, j = 1, \dots, N$.

Por la regla de la cadena, tenemos:

$$-\frac{dV_{ij}}{dt} = -\frac{dV_{ij}}{d\vec{r}_i} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = -\nabla V_{ij} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{F}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_{ij}$$

Sumando a los índices i y j a ambos lados desde 1 hasta N , obtenemos:

$$-\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{dV_{ij}}{dt} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_{ij} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_{ij} = -\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_{ij} \right) = -\frac{dV_{int}}{dt}$$

pues la derivada es lineal. Sustituyendo en la proposición 8 en la página 31, llegamos a:

$$\dot{T} = -\frac{dV_{int}}{dt} + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i \Leftrightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{dV_{int}}{dt} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i$$

Como la derivada es lineal, lo anterior es equivalente a:

$$\frac{d}{dt} (T + V_{int}) = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i$$

Q.E.D.

Proposición 10. *Sea S un sistema de N partículas tal que todas las fuerzas internas son conservativas y tal que la masa de cada una de sus partículas permanece constante en el tiempo. Entonces la variación con respecto al tiempo de la suma de la energía cinética del sistema T según el centro de masas y el potencial de las fuerzas internas V_{int} se debe únicamente a la potencia generada por las fuerzas externas según el centro de masas. En otras palabras:*

$$\frac{d}{dt} (T^* + V_{int}) = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i^* \cdot \vec{F}_i$$

Demostración. Partimos de la proposición 9 en la página anterior:

$$\frac{d}{dt} (T + V_{int}) = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i$$

Por la proposición 7 en la página 30:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (T^* + T_{C.D.M.} + V_{int}) &= \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{F}}_i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(T^* + V_{int} + \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 \right) = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{F}}_i \end{aligned}$$

Como la derivada es lineal, podemos escribir lo anterior como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (T^* + V_{int}) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 \right) &= \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (T^* + V_{int}) + M \dot{\vec{R}} \cdot \ddot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (T^* + V_{int}) = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i - \dot{\vec{R}} \cdot (M \ddot{\vec{R}}) \end{aligned}$$

Por la segunda ley de Newton aplicada a un sistema de partículas (ver proposición 1 en la página 17):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (T^* + V_{int}) &= \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i - \dot{\vec{R}} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right) = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i - \sum_{i=1}^N \dot{\vec{R}} \cdot \vec{F}_i = \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i - \dot{\vec{R}} \cdot \vec{F}_i \right) = \sum_{i=1}^N \left(\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{R}} \right) \cdot \vec{F}_i \end{aligned}$$

Por último, por la proposición 2 en la página 19, tenemos:

$$\frac{d}{dt} (T^* + V_{int}) = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i^* \cdot \vec{F}_i$$

Q.E.D.

Observación 7. Nótese que en el enunciado de la proposición 10 en la página anterior, el potencial de las fuerzas internas no lleva *. Esto no es necesario, porque como las fuerzas internas son conservativas, dicho potencial debe ser únicamente función de la distancia entre las partículas $V_{ij} = \mathfrak{F}!(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$. Esto se debe a que el vector resta de dos vectores nunca depende del origen del sistema de referencia afín tomado.

Teorema 4 (Teorema de conservación de la energía mecánica para un sistema de partículas). *Sea S un sistema de N partículas tal que la masa de cada una de sus partículas permanece constante en el tiempo. Si todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas son conservativas, entonces la energía mecánica total $T + V$ del sistema se conserva.*

$$E = T + V = \text{cte}$$

Demostración. Si todas las fuerzas son conservativas, en particular lo son las externas. En consecuencia, sabemos que existen funciones escalares $V_i : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ con Ω abierto tales que: $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}V_i = -\frac{dV_i}{d\vec{r}_i} \quad \forall i = 1, \dots, N$.

Por la regla de la cadena:

$$-\frac{dV_i}{dt} = -\frac{dV_i}{d\vec{r}_i} \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i$$

Sumando a ambos lados en i desde 1 hasta N , obtenemos:

$$-\sum_{i=1}^N \frac{dV_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i$$

Como la derivada es lineal, lo anterior es equivalente a:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i = -\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N V_i \right) = -\frac{dV_{ext}}{dt}$$

por el principio de superposición. Como todas las fuerzas internas son conservativas, podemos aplicar la proposición 9 en la página 33:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (T + V_{int}) &= \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i = -\frac{dV_{ext}}{dt} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (T + V_{int}) = -\frac{dV_{ext}}{dt} \end{aligned}$$

Como la derivada es lineal, obtenemos:

$$\frac{d}{dt} (T + V_{int} + V_{ext}) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (T + V) = 0 \Leftrightarrow E = T + V = \text{cte}$$

Q.E.D.

Observación 8. En el caso del teorema 4 en la página anterior, V sí que depende del sistema de referencia usado, pues $V_i = \mathfrak{F}(\vec{r}_i)$.

1.5. Ecuaciones de Lagrange para un sistema de partículas

Definición 12. Sea S un sistema de N partículas tal que todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas del sistema son conservativas. Llamamos **lagrangiano** o **función lagrangiana** a la resta de la energía cinética total del sistema y su energía potencial.

$$\mathcal{L} := T - V$$

Teorema 5 (Ecuaciones de Euler-Lagrange). *Sea S un sistema de N partículas tal que todas las fuerzas internas son conservativas y tal que la masa de cada una de sus partículas permanece constante en el tiempo. Entonces:*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{i,j}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{i,j}} \quad i = 1, \dots, N; j = x, y, z$$

Demostración. Como todas las fuerzas que actúan sobre S son conservativas, sabemos que existe una función escalar $V : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ con Ω abierto tal que:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \quad \forall i = 1, \dots, N \Leftrightarrow m_i \ddot{r}_{i,j} = -\frac{\partial V}{\partial r_{i,j}} \quad \forall i = 1, \dots, N; j = x, y, z \quad (1.5.1)$$

donde V será la función potencial de la resultante de todas las fuerzas.

Por otra parte, por el corolario 8 en la página 30:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{r}}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{\vec{r}}_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right)$$

Como la derivada es lineal, obtenemos:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{r}}_j} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{\vec{r}}_j} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i 2 \dot{\vec{r}}_i \delta_{ij} = m_i \dot{\vec{r}}_i \quad \forall i = 1, \dots, N$$

donde $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$ es la delta de Kronecker. De esta forma, lo anterior es equivalente a:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}_{i,j}} = m_i \dot{r}_{i,j} \quad \forall i = 1, \dots, N; \forall j = x, y, z \quad (1.5.2)$$

Además, sabemos por las proposición 11 en la página 30 que T no dependerá de las posiciones y como V es el potencial asociado a una fuerza conservativa, V no dependerá de las velocidades.

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{r}_i} = \vec{0} \quad \forall i = 1, \dots, N \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial r_{i,j}} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N; \forall j = x, y, z \quad (1.5.3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \vec{0} \quad \forall i = 1, \dots, N \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial \dot{r}_{i,j}} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N; \forall j = x, y, z \quad (1.5.4)$$

De esta forma, por la definición 12 en la página anterior al ser la derivada lineal:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{i,j}} = \frac{\partial}{\partial r_{i,j}} (T - V) = \frac{\partial T}{\partial r_{i,j}} - \frac{\partial V}{\partial r_{i,j}}$$

Por las ecuaciones 1.5.3 y 1.5.1 en la página anterior, obtenemos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{i,j}} = m_i \ddot{r}_{i,j} \quad \forall i = 1, \dots, N; \forall j = x, y, z \quad (1.5.5)$$

Por otra parte, por la definición 12 en la página anterior al ser la derivada lineal:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{i,j}} = \frac{\partial}{\partial \dot{r}_{i,j}} (T - V) = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_{i,j}} - \frac{\partial V}{\partial \dot{r}_{i,j}}$$

Por las ecuaciones 1.5.2 y 1.5.4, obtenemos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{i,j}} = m_i \dot{r}_{i,j} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{i,j}} \right) = m_i \ddot{r}_{i,j} \quad \forall i = 1, \dots, N; \forall j = x, y, z \quad (1.5.6)$$

Por ende, juntando las ecuaciones 1.5.5 y 1.5.6, llegamos a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{i,j}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{i,j}} \quad i = 1, \dots, N; j = x, y, z$$

Q.E.D.

Proposición 11. *Sea S un sistema de N partículas tal que todas las fuerzas internas son conservativas y tal que la masa de cada una de sus partículas permanece constante en el tiempo. Si las fuerzas externas que actúan sobre las partículas de S son tales que existe un campo $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ constante en el espacio ($\vec{g} \neq \mathfrak{F}(\vec{r})$) tal que $\vec{F}_i = m_i \vec{g} \forall i, \dots, N$, entonces el lagrangiano del sistema S es susceptible de separarse en dos lagrangianos, uno para el movimiento del centro de masas y otro para el movimiento de las partículas de S en torno a su centro de masas.*

Demostración. Hallemos la energía potencial asociada a las fuerzas externas:

$$-\frac{dV_i}{d\vec{r}_i} = m_i \vec{g} \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Por el teorema del gradiente:

$$V_i = - \int_{\vec{r}_i} m_i \vec{g} \cdot d\vec{r}_i + K = -m_i \vec{g} \cdot \vec{r}_i + K$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $K = 0$. Sumando a todas las partículas, obtendremos el potencial asociado a las fuerzas externas:

$$V_{ext} = \sum_{i=1}^N V_i = \sum_{i=1}^N -m_i \vec{g} \cdot \vec{r}_i = -\vec{g} \cdot \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right) = -M \vec{g} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M} \right)$$

Por la definición 1 en la página 16, tenemos:

$$V_{ext} = -M \vec{g} \cdot \vec{R}$$

Ahora bien, por la definición 12 en la página 35, tenemos:

$$\mathcal{L} = T - V$$

Por la proposición 7 en la página 30 y usando que $V = V_{ext} + V_{int}$, obtenemos:

$$\mathcal{L} = T^* + T_{C.D.M.} - V_{ext} - V_{int} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + M \vec{g} \cdot \vec{R} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^* \cdot \dot{\vec{r}}_i^* - V_{int}$$

donde el último término únicamente depende de la distancia entre las partículas. Así, podemos escribir:

$$\mathcal{L}_{C.D.M.} = T_{C.D.M.} - V_{ext} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + M \vec{g} \cdot \vec{R}$$

$$\mathcal{L}^* = T^* - V_{int} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^* \cdot \dot{\vec{r}}_i^* - V_{int}$$

Q.E.D.

Observación 9. Como consecuencia de la proposición 11, el lagrangiano de un sistema de partículas puede separarse en un lagrangiano que sólo depende de \vec{R} y $\dot{\vec{R}}$ y otro que depende de \vec{r}_i^* y $\dot{\vec{r}}_i^*$. Por ende, podemos aplicar las leyes de conservación de forma separada al centro de masas y al resto de partículas.

1.6. Problemas

Ejercicio 1 (Problema 1.1). Calcular la posición del centro de masas de una hemiesfera sólida de densidad constante ρ y radio a . Suponer el centro de la esfera original en el origen de coordenadas y la base de la hemiesfera en el plano XY .

Solución. Tal como dicta el enunciado, calcularemos el centro de masas de una distribución continua de masa con forma de hemiesfera. Sabemos por la proposición 1 en la página 16 que la expresión para el cálculo de un centro de masas para distribuciones continuas de masa es la siguiente:

$$\vec{R} = \frac{\iiint_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV}{\iiint_V dm}$$

Podemos obviar el cálculo de la integral presente en el denominador, pues sabemos que su resultado será igual a la masa total de la hemiesfera; al ser una distribución de masas con densidad constante, tendremos que la masa total de la hemiesfera es igual a:

$$M = \rho V_{hemi} = \frac{1}{2} \rho V_{esfera} = \frac{2}{3} \rho \pi a^3 \quad (1.6.1)$$

Debido a la simetría respecto a un eje de revolución (y a que la densidad de masa es constante en todo el volumen de la hemisfera), podemos asegurar que la posición del centro de masas estará localizado en algún punto del eje Z ; así pues:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \iiint_V z \rho(\vec{r}) dV \hat{z}$$

Empleando coordenadas esféricas, el diferencial de volumen será expresado como $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$, por lo tanto:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \left(\iiint_V z \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \right) \hat{z}$$

En coordenadas esféricas, $z = r \cos \theta$. Además los límites de integración cumplirán que r varía en el intervalo $[0, r]$, φ en el intervalo $[0, 2\pi]$ y la variable θ en $[0, \frac{\pi}{2}]$; por lo que la integral resultante queda como:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{1}{M} \left(\rho \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^3 \sin \theta \cos \theta dr d\theta d\varphi \right) \hat{z} = \\ &= \frac{1}{M} \left(\varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_0^{\pi/2} \right) \left(\rho \int_0^a r^3 dr \right) \hat{z} = \\ &= \frac{1}{M} \left(\varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_0^{\pi/2} \right) \left(\frac{1}{4} r^4 \Big|_0^a \right) \hat{z} = \frac{\rho \pi a^4}{4M} \hat{z} \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor antes calculado de M en la ecuación 1.6.1, obtenemos que la posición del centro de masas de una hemiesfera centrada en el origen y con base en el plano XY se encuentra en:

$$\vec{R} = \frac{3}{8} a \hat{z}$$

Q.E.F.

Ejercicio 2 (Problema 1.2). Una cuerda (densidad lineal de masa λ , longitud l) se encuentra inicialmente en reposo en posición vertical, con su extremo inferior justo encima de una superficie horizontal. En un instante dado se deja caer en caída libre sobre la superficie. ¿Qué fuerza se ejerce sobre la superficie horizontal, cuando una porción de la cuerda de longitud x ha alcanzado la superficie?

Solución. En este problema se dividirá la cuerda en dos partes: la que sigue cayendo ($M_C = \lambda(l-x)$) y la que se encuentra apoyada sobre el suelo ($M_S = \lambda x$). Gracias a la proposición 1 en la página 16, puede calcularse la posición del centro de masas de la cuerda en función de la distancia de caída x (visto desde un punto a distancia l del suelo). Primero, resulta conveniente concretar el centro de masas de la parte de la cuerda que está cayendo, así como de la parte que ya se encuentra en el suelo. Respectivamente:

$$x_{CM,C} = \frac{l-x}{2} + x = \frac{l+x}{2}$$

$$x_{CM,S} = l$$

$$x_{CM} = \frac{M_S x_{CM,S} + M_C x_{CM,C}}{M} = \frac{1}{\lambda l} \left(x \lambda l + \frac{l+x}{2} \lambda (l-x) \right) = \frac{1}{l} \frac{2xl + (l+x)(l-x)}{2} = \frac{l^2 - x^2 + 2xl}{2l}$$

La variación de esta posición será entonces:

$$\dot{x}_{CM} = \frac{d}{dt} \left(\frac{l^2 - x^2 + 2xl}{2l} \right) = -\frac{2x\dot{x}}{2l} + \dot{x} = \dot{x} \left(1 - \frac{x}{l} \right) = \frac{\dot{x}}{l} (l-x)$$

La energía potencial vendrá dada como:

$$V = Mg x_{CM} = -\lambda lg \frac{l^2 - x^2 + 2xl}{2l} = -\lambda g \frac{l^2 - x^2 + 2xl}{2}$$

Y la energía cinética (dado que el fragmento que cae tiene masa M_C y velocidad $\dot{x}_{CM,C} = \frac{\dot{x}}{2}$):

$$T = \frac{1}{2} M_C \dot{x}_{CM,C}^2 = \frac{1}{2} \lambda (l-x) \left(\frac{\dot{x}}{2} \right)^2$$

Como la energía se conserva en todo momento, necesariamente:

$$E_0 = V(x=0) = -\frac{\lambda gl^2}{2} = E(x) = \frac{\lambda}{2} \left[(l-x) \left(\frac{\dot{x}}{2} \right)^2 - g(l^2 - x^2 + 2xl) \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\lambda gl^2}{2} = \frac{\lambda}{2} \left[(l-x) \left(\frac{\dot{x}}{2} \right)^2 - g(l^2 - x^2 + 2xl) \right]$$

Despejando, se llega a la ecuación diferencial:

$$\dot{x}^2 = 4g \frac{2xl - x^2}{l-x}$$

Inicialmente, podría parecer que esta solución no tiene sentido físico, pues se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow l} \dot{x} = \infty$$

Esto significa que el extremo superior de la cuerda llega al suelo con velocidad infinita, hecho que se ve amortiguado por fuerzas internas y por el hecho de que la cuerda no es perfectamente inextensible. Sin embargo, parece lógico afirmar que un sistema que pierde masa hasta quedarse sin nada (el tramo de la cuerda que cae) incrementa su velocidad de manera indefinida, haciendo que la función diverja hacia infinito en el punto $x = l$. Una vez que se ha obtenido la velocidad en función de la longitud de cuerda posada sobre el suelo, puede calcularse la fuerza ejercida sobre esa superficie en función del mismo parámetro, pues:

$$F = F_g + F_{\text{dinámica}} = F_g + \frac{dp}{dt} = F_g + \frac{vdm}{dt} = mg + \frac{\lambda \dot{x}^2 dt}{dt} = \lambda g \left(x + 4 \frac{2lx - x^2}{l-x} \right)$$

De nuevo aparece una magnitud que diverge cuando la longitud de cuerda apoyada en el suelo tiende a l , lo que resulta comprensible tras haber observado este particular efecto en la velocidad.

Q.E.F.

Ejercicio 3 (Problema 1.3). (Ejercicio de examen, Septiembre de 2018) Una rana de masa m está sentada en el extremo de un bloque de madera (de longitud L y masa M) que descansa sobre la superficie de un lago helado (sin rozamiento). En un momento dado, la rana salta hacia el otro extremo de la tabla con un ángulo α . ¿Cuál debe ser la velocidad de la rana (en módulo) para que llegue justo al otro extremo de la tabla?

Solución. El principal punto a considerar antes de enfrentarse a la resolución de este problema, consiste en ver que al saltar la rana de un extremo a otro de la tabla, ésta se moverá en sentido contrario al que la rana ha saltado (debido a la conservación del momento lineal, presente en el corolario 3 en la página 19); esto causará que cuando la rana "aterrice" sobre el extremo opuesto de la tabla, este extremo se encontrará en una posición distinta a la que se encontraba originalmente.

El movimiento de la rana en el aire es tiro parabólico. En consecuencia, su posición de la rana tras el salto puede expresarse como:

$$\vec{X}_{rana} = (v_{rana} \cos \alpha t) \hat{i} + \left(v_{rana} \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \right) \hat{j}$$

Para conocer el tiempo que ha transcurrido desde el salto hasta el aterrizaje, solo debemos igualar la componente en \hat{j} a 0:

$$v_{rana} \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \frac{v_{rana}}{g} \sin \alpha \end{cases} \quad (1.6.2)$$

Teniendo en cuenta que a $t = 0$ la rana acaba de saltar, obviamos este resultado, siendo el segundo tiempo ($t = 2 \frac{v_{rana}}{g} \sin \alpha$) el que trataremos. En este tiempo, la rana habrá recorrido un espacio:

$$\Delta x = v_{rana} \cos \alpha t \quad (1.6.3)$$

De modo que en el mismo tiempo, para que la rana lograse alcanzar el extremo opuesto de la tabla (está en movimiento), la tabla habrá recorrido un espacio $L - \Delta x$ en dirección contraria al salto de la rana.

Por lo comentado anteriormente, tendremos que en el tiempo t dado por la ecuación 1.6.2 que la rana tarda en realizar el salto, la tabla ha recorrido un cierto espacio, esto puede ser formulado como:

$$L - \Delta x = v_{tabla} t$$

Conociendo el espacio Δx (ecuación 1.6.3) recorrido por la rana, podemos sustituir en la anterior ecuación:

$$v_{tabla} = \frac{L - v_{rana} \cos \alpha t}{t}$$

Conocido también el tiempo t (ecuación 1.6.2) que necesita la rana para alcanzar el extremo opuesto de la tabla:

$$v_{tabla} = \frac{L - v_{rana} \cos \alpha \left(2 \frac{v_{rana}}{g} \sin \alpha \right)}{2 \frac{v_{rana}}{g} \sin \alpha}$$

Empleando la conocida relación trigonométrica del ángulo doble, $2 \cos \alpha \sin \alpha = \sin(2\alpha)$, la expresión de la velocidad de la tabla en función de parámetros conocidos y la velocidad de la rana en su primer momento es:

$$v_{tabla} = \frac{L - v_{rana}^2 \sin(2\alpha) / g}{2 \frac{v_{rana}}{g} \sin \alpha} \quad (1.6.4)$$

Tenemos así una relación entre el módulo de la velocidad de la tabla y el módulo de la velocidad de la rana; para poder conocer el valor de estas dos cantidades, deberemos derivar otra expresión que las relacione.

Como dijimos al comienzo de este ejercicio, la tabla se mueve debido al salto de la rana a causa de la conservación del momento lineal. Según queda probado en el corolario 3 en la página 19, la variación del

momento lineal de un sistema sin influencia de fuerzas externas (como es el nuestro en el plano horizontal debido a la nula existencia de rozamiento) es nula, por lo que el momento lineal (únicamente en este plano, pues en el eje vertical no se conserva, de conservarse, al saltar la rana, la tabla se hundiría en el hielo) antes y después del salto es el mismo; esto nos aporta la siguiente ecuación:

$$mv_{rana} \cos \alpha - v_{tabla}M = 0 \Leftrightarrow v_{tabla} = \frac{m}{M}v_{rana} \cos \alpha$$

Sustituyendo este valor en la relación que calculamos anteriormente (ecuación 1.6.4 en la página anterior), esto nos resulta en:

$$\frac{L - v_{rana}^2 \operatorname{sen}(2\alpha)/g}{2\frac{v_{rana}}{g} \operatorname{sen} \alpha} = v_{rana} \frac{m}{M} \cos \alpha$$

Podemos operar esta expresión (empleando de nuevo la relación trigonométrica del angulo doble) para obtener la que sigue:

$$\begin{aligned} L - v_{rana}^2 \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{g} &= v_{rana}^2 \frac{m}{gM} \operatorname{sen}(2\alpha) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow L &= \frac{v_{rana}^2}{g} \operatorname{sen}(2\alpha) \left(\frac{m}{M} + 1 \right) \end{aligned}$$

Así, despejando el valor de la rapidez de la rana, obtendremos:

$$v_{rana} = \sqrt{\frac{gL}{\left(\frac{m}{M} + 1\right) \operatorname{sen} 2\alpha}}$$

Q.E.F.

Ejercicio 4 (Problema 1.4). Un cohete en el espacio exterior (sin gravedad) se acelera desde el reposo (con velocidad inicial nula) con aceleración constante a hasta que alcanza una velocidad v . La masa inicial del cohete es M_0 . Calcule el trabajo hecho por el motor del cohete. (Tenga en cuenta tanto el trabajo sobre el cohete como el trabajo sobre el combustible eyectado).

Solución. Al tratarse de un ejercicio unidimensional, se eliminará el carácter vectorial de las magnitudes. Así, la definición de trabajo queda:

$$W = \int F dx = \int \frac{d}{dt} dx = \int v dp$$

El cohete propuesto puede describirse con la ecuación del cohete de Tsiolkovski (vista en el ejemplo 1 en la página 20), que se obtiene tras aplicar la conservación del momento lineal (corolario 3 en la página 19) para un objeto de masa M viajando a velocidad v que sufre variaciones de masa dM . Al ser estos diferenciales de masa negativos, puede interpretarse que se eyectan diferenciales de masa $-dM$ con una velocidad $v - u$, siendo u la velocidad relativa con la que salen despedidas estas pequeñas cantidades de masa vista desde el cohete. Entonces, puede escribirse el momento lineal del sistema a tiempo t y tras un dt :

$$\begin{cases} p(t) = Mv \\ p(t + dt) = (M + dM)(v + dv) + dM(u - v) \end{cases}$$

De esta forma, despreciando la contribución del producto de diferenciales:

$$Mv = (M + dM)(v + dv) + dM(u - v) \Leftrightarrow -Mdv = udM$$

Resolviendo esta ecuación diferencial:

$$m = m_0 e^{-v/u} \Leftrightarrow m_0 = m e^{v/u} \quad (1.6.5)$$

Con m_0 la masa inicial del cohete. Ahora, conociendo también que la velocidad es constante (luego $v=at$), puede expresarse dp como:

$$dp_{cohete} = d(mv) = madt + atdm = m_0ae^{-at/u} \left(1 - \frac{at}{u}\right) dt$$

Así, para calcular el trabajo total sobre el sistema:

$$W_{total} = W_{cohete} + W_{eyectado} = \int_0^t dp_{cohete} v_{cohete} + \int_0^t dp_{eyectado} v_{eyectado}$$

Sabiendo ahora que para la masa expulsada $v = v_{cohete} - u$ y $dp = dm_{eyectada}(v_{cohete} - u)$:

$$W_{cohete} = \int_0^t m_0ae^{-a\tau/u} \left(1 - \frac{a\tau}{u}\right) a\tau d\tau$$

$$W_{eyectado} = \int_0^t \frac{m_0a}{u} (a\tau - u)^2 e^{-a\tau/u} d\tau$$

$$W_{total} = m_0atue^{-at/u} \stackrel{(1,6,5)}{=} m_{restante}v_{cohete}u$$

Q.E.F.

Ejercicio 5 (Problema 1.5). Supongamos un cohete ascendiendo verticalmente en contra de la gravedad. El cohete quema combustible a un ritmo constante, y eyecta los gases con velocidad u . Despreciando el rozamiento con el aire, encuentre la velocidad del cohete tras quemar una cierta cantidad de combustible.

Solución. Además de considerar que el rozamiento con el aire es despreciable, consideraremos que el campo gravitatorio que actúa sobre el cohete es constante e igual a g . Debido a que existe una fuerza externa (la gravitatoria) el momento lineal **no** podrá conservarse (tal como se demuestra en el teorema 2 en la página 18) debido a que $\dot{\vec{P}} = \vec{F} \neq \vec{0}$.

Podremos decir que en un diferencial de tiempo dt el cohete eyecta un diferencial de masa dm , siendo el ritmo de eyeción $h := \frac{dm}{dt}$.

Podemos comenzar describiendo el momento lineal del sistema (a partir de la definición formal 3 en la página 17 del momento lineal) antes y después de que un cierto tiempo dt haya transcurrido:

$$\begin{cases} P_t = Mv \\ P_{t+dt} = (M - dm)(v + dv) - dm(u - v) \end{cases}$$

Sabemos que para un sistema de partículas, el cambio del momento lineal con el tiempo es igual a $\dot{\vec{P}} = \sum_i \vec{F}_i$ (de nuevo por el teorema 2 en la página 18) y puesto que nos encontramos bajo un campo de fuerzas gravitatorias de valor g , tendremos que:

$$\dot{P} = \frac{P_{t+dt} - P_t}{dt} = \frac{Mdv - dm dv - u dm}{dt} = -gM$$

Podemos despreciar el factor $dm dv$ (diferencial de segundo orden) en comparación con Mdv y udm (de primer orden), así, tendremos que:

$$-Mg = M \frac{dv}{dt} - u \frac{dm}{dt} \equiv M \frac{dv}{dt} - uh$$

A partir de esta expresión, podríamos determinar la velocidad (y, por lo tanto, la posición) del cohete en función del tiempo, sin embargo, puesto que nos piden que lo calculemos en función de la cantidad de combustible

quemado, tendremos que emplear la regla de la cadena y hacer $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dm} \frac{dm}{dt} = \frac{dv}{dm}h$. Así la expresión anterior quedará de la siguiente manera:

$$-Mg = Mh \frac{dv}{dm} - uh$$

Puesto que dm es un diferencial de masa que el cohete pierde, tendremos la relación $dm = -dM$ y así:

$$\begin{aligned} Mg &= Mh \frac{dv}{dM} + uh \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Mg - uh &= Mh \frac{dv}{dM} \Leftrightarrow (Mg - uh) dM = Mh dv \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{Mg - uh}{M} dM &= h dv \Leftrightarrow \left(g - u \frac{h}{M} \right) dM = h dv \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_{M_0}^M \left(g - u \frac{h}{M} \right) dM &= \int_{v_0}^v h dv \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (M - M_0) g - uh \left[\ln M \right]_{M_0}^M &= h(v - v_0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (M - M_0) g + uh \ln \left(\frac{M_0}{M} \right) &= hv - hv_0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow v(M) &= \frac{g}{h}(M - M_0) + u \ln \left(\frac{M_0}{M} \right) + v_0 \end{aligned}$$

Q.E.F.

Ejercicio 6 (Problema 1.6). Un vagón de masa M puede desplazarse por un raíl sin rozamiento. Parte con una velocidad v_0 , mientras cae lluvia que va llenando el vagón. El ritmo de masa que cae por unidad de tiempo es α . Calcule la velocidad y la distancia recorrida en función del tiempo.

Solución. El problema es bastante similar al que retrata un cohete con la salvedad de que los diferenciales de masa son positivos, luego la masa del móvil aumenta. Es preciso tener también en cuenta que el momento lineal de las gotas de lluvia no es transferido al vagón (se considera que cae perpendicular a él de forma perfectamente inelástica). Esto se traduce únicamente como un incremento de masa. El sistema puede describirse como un objeto de masa M que viaja a velocidad v mientras sufre variaciones de masa dM con un ritmo de caída de α . Se considera que sufre variaciones diferenciales negativas en su velocidad.

De esta forma, el momento lineal del sistema a tiempo t y tras un dt es:

$$\begin{cases} p(t) = Mv \\ p(t + dt) = (M + dM)(v + dv) \end{cases}$$

Según el corolario 3 en la página 19, $p(t) = p(t + dt)$. Y si se desprecia también la contribución de los diferenciales de segundo orden:

$$Mv = (M + dM)(v + dv) \Leftrightarrow -Mdv = vdM$$

Resolviendo esta ecuación diferencial:

$$\int_{v_0}^v \frac{-dv'}{v'} = \int_{M_0}^M \frac{dm}{m} \Leftrightarrow \ln \frac{v}{v_0} = \ln \frac{M_0}{M}$$

Y como la función logaritmo es biyectiva, la velocidad en función del tiempo queda:

$$v = \frac{v_0 M_0}{M} = \frac{v_0 M_0}{M_0 + \alpha t}$$

Ahora, haciendo uso de $v = \frac{dx}{dt}$, la posición x en función del tiempo será:

$$x = \int_0^t v d\tau = \int_0^t \frac{v_0 M_0}{M_0 + \alpha \tau} d\tau = \frac{v_0 M_0}{\alpha} \ln \left(\frac{M_0 + \alpha t}{M_0} \right)$$

Q.E.F.

Ejercicio 7 (Problema 1.7). Un cohete en el espacio exterior (sin influencias gravitatorias) empieza a moverse desde un estado de reposo eyectando masa. Deducir la ecuación para la velocidad del cohete en función del ratio de masa. Calcúlese para qué fracción de masa inicial se tiene el momento lineal máximo.

Solución. Puesto que el cohete se encuentra en el espacio exterior sin ninguna influencia gravitatoria, podemos asumir que no existirán fuerzas externas al cohete y que, por lo demostrado en el corolario 3 en la página 19, la cantidad del momento lineal se conservará.

Si en un momento dado la masa del cohete es M y su velocidad v , su momento lineal será $P_t = Mv$; en un diferencial de tiempo, el cohete habrá perdido un diferencial de masa dm , suponiendo que la velocidad de eyeción sea u , el cohete adquirirá un diferencial de velocidad; podemos expresar esta información como parte de la cantidad de momento lineal $P_{t+dt} = (M - dm)(v + dv) - dm(u - v)$.

Puesto que bajo ausencia de fuerzas externas la cantidad de momento lineal se conserva (de nuevo por el corolario 3 en la página 19), podemos decir que $P_t = P_{t+dt}$, es decir:

$$Mv = (M - dm)(v + dv) - dm(u - v)$$

Operando esta expresión, podemos llegar a la que sigue:

$$0 = Mdv - dmdv - udm$$

Al ser el sumando $dmdv$ un diferencial de segundo orden, este puede ser despreciado frente al resto de sumandos (diferenciales de primer orden), de modo que:

$$0 = Mdv - dmdv - udm \rightarrow Mv = udm$$

Puesto que dm es la cantidad de masa que el cohete pierde, es equivalente decir $dm = -dM$ y por lo tanto:

$$Mdv = udm \Leftrightarrow \frac{1}{u} dv = -\frac{1}{M} dM$$

Integrando a ambos lados de la igualdad, obtenemos:

$$\int_{v_0}^v \frac{d\nu}{u} = \int_{M_0}^M \frac{dM}{M} \Leftrightarrow \frac{1}{u} (v - v_0) = \ln \left(\frac{M_0}{M} \right)$$

Ya que en el enunciado se nos dice que el cohete parte del reposo, la expresión de la velocidad en función de la masa del cohete será:

$$v = u \ln \left(\frac{M_0}{M} \right)$$

Ahora, para calcular la fracción de masa y masa inicial que determinan la máxima cantidad de momento lineal, expresaremos esta cantidad como:

$$P = Mv = uM \ln \left(\frac{M_0}{M} \right)$$

Para calcular el momento donde la cantidad de momento es máxima en relación de la masa, tendremos que estudiar los máximos relativos de la función $P(M)$ y estudiar el valor de P en los extremos de los valores

permitidos de M . Hagamos esta segunda parte primero. La masa final del cohete estará entre M_0 y M , luego debemos hallar $P(M_0)$ y P_M .

$$P(M = M_0) = uM_0 \ln 1 = 0$$

Por otra parte, nótese que $P(0)$ no está definido. No obstante, como los polinomios dominan sobre los logaritmos, el límite cuando $M \rightarrow 0^+$ de la función P está bien definido. En otras palabras, P tiene extensión continua en $M = 0$ y el valor de dicha extensión es:

$$\lim_{M \rightarrow 0} P(M) = 0$$

Hecho lo anterior, procedamos a derivar y a igualar la derivada a cero:

$$u \ln\left(\frac{M_0}{M}\right) + uM \frac{M}{M_0} M_0 \left(-\frac{1}{M^2}\right) = u \ln\left(\frac{M}{M_0}\right) - u = u \left[\ln\left(\frac{M}{M_0}\right) - 1\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{M_0}{M} = e$$

Por lo tanto, como es $P\left(\frac{M_0}{e}\right) > 0$, la fracción de masa inicial y masa para la que la cantidad de momento lineal del cohete es máxima es $\frac{M_0}{M} = e$.

Q.E.D.

Ejercicio 8 (Problema 1.8). Se lanza un cohete desde la superficie de la Tierra para que llegue hasta una altura de 50 km. Calcula la velocidad que hay que comunicarle, despreciando la variación de g con la altura (y la rotación de la Tierra). Si la masa final del cohete (sin el combustible) es de 100 kg y la velocidad a la que se expulsan los gases es de $2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$, calcula la masa inicial del cohete.

Solución. El cohete propuesto puede describirse con la ecuación del cohete de Tsiolkovski (al igual que en el ejemplo 1 en la página 20), considerando que la variación de momento lineal es igual a la fuerza resultante sobre el sistema (corolario 3 en la página 19), y tratando el cohete como un objeto de masa M viajando a velocidad v que sufre variaciones de masa dM . Estos diferenciales de masa son negativos, por lo que puede interpretarse que se eyectan diferenciales de masa $-dM$ con una velocidad $v - u$, siendo u la velocidad relativa con la que salen despedidas estas pequeñas cantidades de masa vista desde el cohete. Entonces, puede escribirse el momento lineal del sistema a tiempo t y tras un dt :

$$\begin{cases} p(t) = Mv \\ p(t + dt) = (M + dM)(v + dv) + dM(u - v) \end{cases}$$

De esta forma, despreciando la contribución del producto de diferenciales y siendo la fuerza $Mg = \frac{dp}{dt}$:

$$dtF = (M + dM)(v + dv) + dM(u - v) - Mv \Leftrightarrow Mgdt = Mdv + udM$$

Resolviendo esta ecuación diferencial:

$$\int_{v_0}^v dv' = -g \int_0^t dt' - u \int_{m_0}^m \frac{dM}{M} \Leftrightarrow v = v_0 - gt + u \ln \frac{m_0}{m} = -gt + u \ln \frac{m_0}{m_0 - ht}$$

Con m_0 la masa inicial del cohete y suponiendo que la masa varíe de forma lineal. Ahora, puede obtenerse la ecuación para la posición del cohete:

$$\begin{aligned} x &= \int_0^{x_f} dx = \int_0^t v d\tau = \int_0^t \left(-g\tau + u \ln \frac{m_0}{m_0 - ht}\right) d\tau \\ x &= -\frac{1}{2}gt^2 + tu \left[\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - ht}\right) + 1\right] - \frac{m_0 u}{h} \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - ht}\right) \end{aligned}$$

Si se pretende que el cohete llegue con velocidad nula al punto superior:

$$-gt + u \ln \frac{m_0}{m_f} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{u}{g} \ln \frac{m_0}{m_f}$$

$$x = -\frac{1}{2}g \left(\frac{u}{g} \ln \frac{m_0}{m_f} \right)^2 + \frac{u^2}{g} \ln \frac{m_0}{m_f} \left[\ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right) + 1 \right] - \frac{m_0 u}{h} \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right)$$

Ahora, la ecuación que relaciona la masa inicial necesaria con la tasa h de eyeción de masa por unidad de tiempo es:

$$50000 = -\frac{9,81}{2} \left(\frac{2000}{9,81} \ln \frac{m_0}{100} \right)^2 + \frac{4}{9,81} \ln \frac{m_0}{100} \left[\ln \left(\frac{m_0}{100} \right) + 1 \right] - \frac{2m_0}{h} \ln \left(\frac{m_0}{100} \right)$$

Es decir, la masa inicial dependerá de un parámetro libre sin especificar (La tasa de expulsión de materia por unidad de tiempo).

Q.E.F.

Ejercicio 9 (Problema 1.9). Sean N partículas de masa M colocadas a lo largo de una recta, de modo que cada una toca a la siguiente.

a) Desde la izquierda vienen dos masas M con la misma velocidad v y chocan con la fila de N masas. Demostrar la imposibilidad que, como consecuencia de la colisión, sea expulsada una sola masa por la derecha o que lo sean dos masas con velocidades diferentes v_1 y v_2 .

b) A la fila de N masas se le añade otra de masa m por la derecha y se tiene una masa M con velocidad v que choca con la fila por la izquierda. Demostrar la imposibilidad que si $m < M$, salga expulsada una única masa. Si salen expulsadas dos masas, ¿cuáles serían sus velocidades? Si $m > M$ y, como consecuencia de la colisión, sale una masa por la derecha y la masa que ha chocado rebota, ¿cuáles serán sus velocidades? ¿Qué ocurre si m es muy grande?

Solución. Este ejercicio es un ejemplo de choque de partículas muy similar al observado en el conocido “péndulo de Newton” donde una partícula con una cierta masa colisiona con una fila de masas iguales a ella causando que la partícula del extremo salga expulsada (y al estar conectadas a cuerdas tensoras) para después volver a repetirse el proceso.

Considerando que no existe fricción entre las partículas y el suelo o entre ellas mismas, y que las colisiones sean perfectamente elásticas, podemos suponer que la cantidad de momento lineal se conservará (puesto que según el corolario 3 en la página 19 en ausencia de fuerzas externas la variación del momento lineal respecto al tiempo es nula).

a) Antes de adentrarnos en la solución del ejercicio, centrémonos primero en estudiar que ocurre en una colisión perfectamente elástica entre dos partículas de masa M estando una en reposo y otra con una velocidad v . En el instante antes de la colisión, la primera partícula tendrá una velocidad v y la segunda partícula estará en reposo, por ello la cantidad de momento lineal del sistema (empleando la definición formal presente en la definición 3 en la página 17) será igual a $p_0 = Mv$, y justo después de la colisión, la cantidad de momento lineal será igual a $p_f = Mu_1 + Mu_2 = M(u_1 + u_2)$ siendo u_1 la velocidad de la primera partícula tras la colisión y u_2 la velocidad de la segunda. Al conservarse la cantidad de momento lineal (de nuevo por el corolario 3 en la página 19), tendremos que:

$$p_0 = p_f \rightarrow v = u_1 + u_2$$

Puesto que bajo nuestra suposición el choque es elástico, el coeficiente de restitución del choque cumplirá que $e = 1$, es decir:

$$e = 1 = -\frac{u_1 - u_2}{v}$$

Así, obtenemos un sistema de dos ecuaciones para las dos incógnitas u_1 y u_2 , donde obtenemos la solución:

$$u_1 = 0 \quad u_2 = v$$

Es decir, tras la colisión de dos partículas de igual masa donde una de ellas se encontraba originalmente en reposo, las velocidades de las dos partículas se cambian haciendo que la primera partícula se quede en reposo y que la segunda sea expulsada con una velocidad igual a la que tenía originalmente la primera partícula.

Esto nos permite solucionar el ejercicio; supongamos que las dos partículas en que van a colisionar con la fila de N partículas se lanzan en un intervalo cualquiera de tiempo (primero una y luego otra), en ese caso, lo que ocurrirá será:

- i) La partícula chocará con la primera partícula de la fila, transfiriendo toda su velocidad a ésta.
- ii) La primera partícula chocará con la segunda, transfiriendo su velocidad a ésta.

⋮

N) La partícula $(N - 1)$ -ésima choca con la partícula N -ésima transfiriendo su velocidad a ésta.

N+1) La partícula N -ésima saldrá expulsada con una velocidad v .

Así, una partícula colisionando con la fila de N partículas de misma masa causará que una partícula sea expulsada de la fila con la misma velocidad que tenía la partícula incidente y haciendo que el resto de partículas pertenezcan en reposo (tal como el mencionado péndulo Newtoniano). Por lo que, al lanzar la segunda partícula, saldrá expulsada una segunda partícula de la fila con velocidad igual a la primera incidente, por lo que serán 2 partículas las que sean expulsadas, las dos con misma velocidad igual a v .

b) Empleando lo estudiado en el anterior apartado (dos partículas de misma masa con una en reposo tras colisionar intercambian sus estados de movimiento), podemos ver que el problema de hacer chocar una partícula con otra en reposo, es equivalente a hacer que choque con una fila de partículas en reposo; por lo tanto, para solucionar este ejercicio solo deberemos estudiar una colisión entre una partícula de masa M y velocidad v y una partícula de masa m en reposo.

Tomando una partícula de masa M con velocidad v que colisiona elásticamente con una partícula en reposo de masa m , vemos (por la definición 3 en la página 17) que la cantidad de momento lineal inicial será $p_0 = Mv$ y tras la colisión $p_f = Mu_1 + mu_2$, si como anteriormente se cumple que no existen fuerzas externas, se conservará la cantidad de momento (de nuevo por el corolario 3 en la página 19), por lo que:

$$p_0 = p_f \rightarrow M(v - u_1) = mu_2$$

Si el choque es perfectamente elástico, el coeficiente de restitución cumplirá que $e = 1$ y:

$$e = 1 = -\frac{u_1 - u_2}{v}$$

Solucionando el sistema de ecuaciones entre relaciones de u_1 y u_2 , obtendremos que:

$$u_1 = v \left(\frac{M - m}{M + m} \right) \quad u_2 = 2v \left(\frac{M}{M + m} \right)$$

Como vemos, la velocidad a la que sale expulsada la partícula de masa m será siempre positiva (por eso decimos que sale expulsada) mientras que la partícula de masa M puede revotar contra la otra partícula (si $M < m$) o ser expulsada con una cierta velocidad (si $M > m$).

Así pues, como respuesta al ejercicio, si $M > m$ la partícula de masa m saldrá expulsada con velocidad $u_2 = 2v \left(\frac{M}{M + m} \right)$ y la última partícula de masa M de la fila saldrá expulsada también con una velocidad $u_1 = v \left(\frac{M - m}{M + m} \right)$; si $m < M$ la partícula de masa m saldrá expulsada con velocidad $u_2 = 2v \left(\frac{M}{M + m} \right)$ y la

última partícula de masa M rebotará contra ella con una velocidad $u_1 = v \left(\frac{M-m}{M+m} \right)$, ésta partícula chocará con la anterior partícula de masa M transfiriendo toda su velocidad a esta (tal como vimos en el anterior apartado), causando que la partícula de masa M original salga expulsada (por la izquierda) a una velocidad $u_1 = v \left(\frac{M-m}{M+m} \right)$.

En el caso de que m sea muy grande (comparada con M), podremos decir que ésta tiende a ∞ , para ver los efectos tras el choque podemos calcular el límite cuando $m \rightarrow \infty$ en las velocidades u_1 y u_2 :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_1 = -v \quad \lim_{m \rightarrow \infty} u_2 = 0$$

Estos resultados nos dicen que si $m \gg M$, la partícula de masa m no se moverá tras el choque, mientras que la partícula de masa M rebotará contra ella con la misma velocidad y de sentido contrario (y tras múltiples choques, la partícula original será expulsada por la izquierda con la misma velocidad con la que incidió pero con sentido contrario).

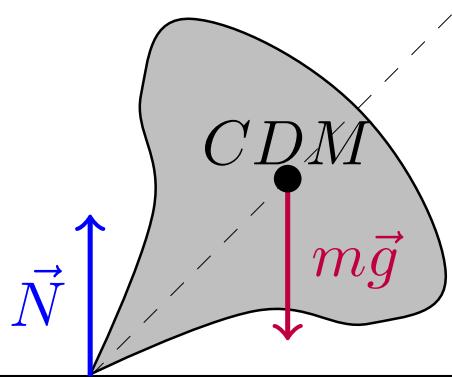
Q.E.F.

Capítulo 2

Sólido rígido

2.1. Introducción

Consideremos una peonza.



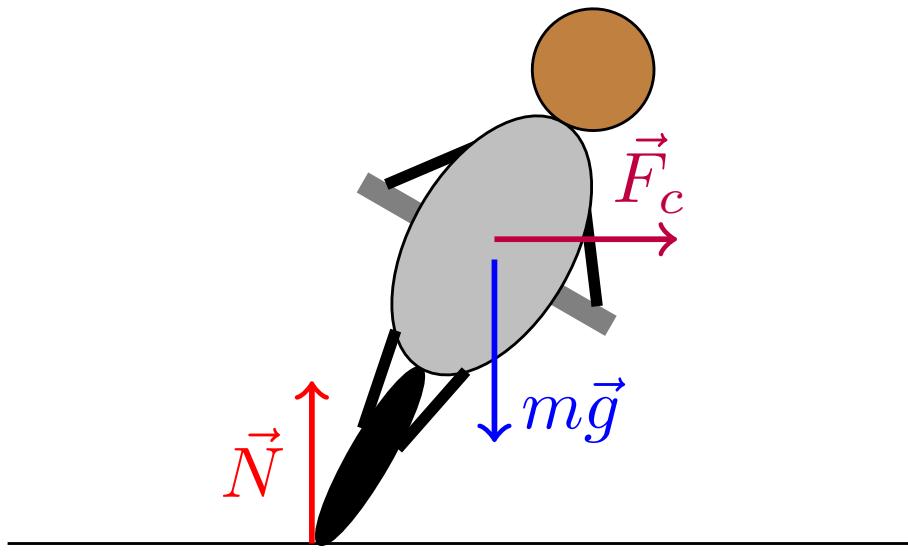
Supondremos que la peonza tiene un punto fijo de apoyo en la Tierra en torno al cual la peonza puede rotar pero no desplazarse. Veamos qué fuerzas actúan sobre la peonza. En el punto de apoyo tenemos la normal del suelo y, además, en el centro de masas tenemos el peso. Estudiemos los momentos de fuerzas tomando el punto de apoyo como punto de referencia. De esta forma, la normal no ejerce momento, pero el peso sí. Por lo tanto, todo parece indicar que la peonza debería caerse; no obstante, sabemos experimentalmente que esto no ocurre, en este capítulo veremos por qué.

En este capítulo vamos a ver qué acontece cuando tenemos cuerpos girando. Todo lo que el lector ha visto hasta ahora sobre sólidos rígidos no son más que burdas simplificaciones: hasta ahora, siempre hemos supuesto que:

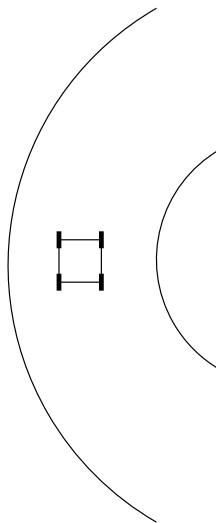
$$\vec{J} = I\vec{\omega}$$

donde I es el momento de inercia del sólido. En este caso, sería siempre $\vec{J} \parallel \vec{\omega}$; pero esto no se da siempre. En general, de hecho, I será un tensor $(0, 2)$.

Algo similar a la peonza ocurre con las carreras de motos, en las que el motorista es capaz de inclinarse (e incluso tocar el suelo con el codo) sin que la moto se caiga.



También, en un coche, al dar una curva a alta velocidad, al conductor le interesa hacer tracción en la rueda interior, para que el rozamiento del suelo le ayude a dar la curva.



2.2. Leyes básicas

Vamos a hacer un resumen de las leyes físicas vistas hasta ahora, pero aplicadas a un sólido rígido.

Definición 13. Sea $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Llamamos **sólido rígido** a un conjunto de N partículas tal que las distancias relativas entre las partículas que lo forman son constantes. Es decir:

$$|\vec{r}_j - \vec{r}_i| = \text{cte} \quad \forall i, j = 1, \dots, N$$

Observación 10. Los sólidos rígidos no existen en la realidad, ya sea porque presentan elasticidad, por efectos de temperatura, etc.

Observación 11. Un sólido rígido puede estar formado por un número finito o infinito de partículas. Una peonza es tan sólido rígido como una varilla que une dos bolas.

Para describir un sistema de partículas, en general, necesitamos $3N$ partículas. Sin embargo, en el caso de un sólido rígido nos van a bastar 3 coordenadas para el centro de masas y otras 3 coordenadas para dar la orientación relativa del sólido rígido con respecto al centro de masas. En este capítulo, vamos a centrarnos sobre todo en la segunda parte. Nótese que la posición del centro de masas está relacionada con la traslación del cuerpo, mientras que las coordenadas de la orientación están relacionadas con la rotación del cuerpo.

Proposición 12. *Sea $N \in \mathbb{N}$ y sea un sólido rígido de N partículas. Se cumple:*

1. *La posición del centro de masas del sólido rígido viene dado por:*

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

$$\text{donde } M = \sum_{i=1}^N m_i.$$

2. *El momento lineal total del sólido rígido coincide con el que tendría una única partícula de masa $M = \sum_{i=1}^N m_i$ y que se desplazara con la velocidad del centro de masas $\dot{\vec{R}}$.*

$$\vec{P} = M \dot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i$$

3. *El momento angular total del sólido rígido con respecto de un punto $O \in \mathbb{R}^3$ puede expresarse como:*

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$$

4. *El momento angular total del sólido rígido visto desde un sistema de referencia \mathcal{R} está relacionado con aquél visto desde el centro de masas por la ecuación:*

$$\vec{J} = \vec{J}_{C.D.M.} + \vec{J}^*$$

5. *La energía cinética total del sólido rígido puede calcularse como:*

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$

6. *La energía cinética total del sólido rígido vista desde un sistema de referencia \mathcal{R} está relacionada con aquélla vista por el centro de masas mediante:*

$$T = T_{C.D.M.} + T^*$$

7. *El movimiento del centro de masas del sólido rígido está regido por la ecuación:*

$$\dot{\vec{P}} = M \ddot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

8. La variación del momento angular total del sólido rígido con respecto de un punto $O \in \mathbb{R}^3$ es debida únicamente a agentes externos y coincide con el momento de fuerzas resultante de las fuerzas externas:

$$\dot{\vec{J}} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{N}_{ext}$$

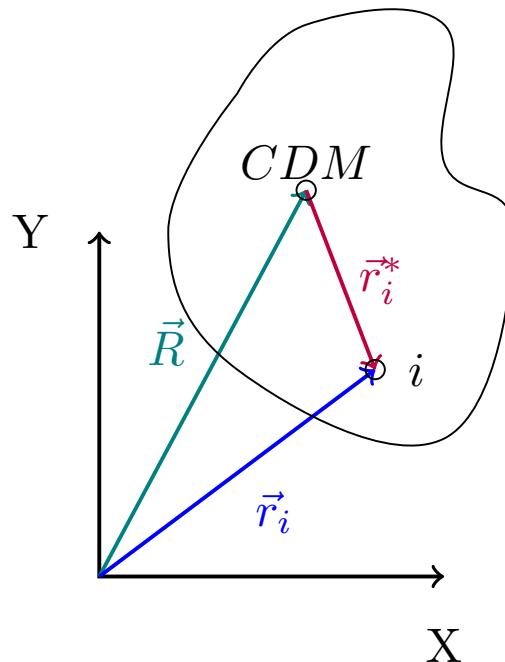
9. La variación de la energía cinética total del sólido rígido se debe exclusivamente a agentes externos y coincide con la potencia generada por las fuerzas externas:

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i$$

10. Si todas las fuerzas externas que actúan sobre el sólido rígido son conservativas, entonces la energía mecánica del sólido rígido se conserva:

$$E = T + V = \text{cte}$$

donde V depende únicamente de las fuerzas externas.



Demostración.

1. Se llega al resultado aplicando la definición 1 en la página 16.
2. Esto se debe a la proposición 1 en la página 17 y al corolario 2 en la página 17.
3. Se obtiene el enunciado al hacer uso del corolario 4 en la página 21.
4. Se llega al resultado al aplicar la proposición 4 en la página 22.
5. Esto se debe al corolario 8 en la página 30.

6. Se obtiene el enunciado al hacer uso de la proposición 7 en la página 30.
7. Se llega al resultado aplicando el teorema 2 en la página 18.
8. Por la definición de sólido rígido (ver definición 13 en la página 50), la distancia entre cada una de las partículas que lo forman permanece constante en el tiempo:

$$|\vec{r}_j - \vec{r}_i| = \text{cte} \quad \forall i, j = 1, \dots, N$$

En consecuencia, para cada par de partículas i -ésima y j -ésima la fuerza \vec{F}_{ij} debe ser perpendicular al vector $\vec{r}_j - \vec{r}_i$, pues si no lo fuera, aparecería una aceleración que aumentaría el módulo del vector $\vec{r}_j - \vec{r}_i$ y esto sería absurdo pues contradiría la hipótesis. En consecuencia, debe ser $\vec{F}_{ij} \perp \vec{r}_j - \vec{r}_i \quad \forall i, j = 1, \dots, N$. Por otra parte, por la 3^a ley de Newton, debe ser $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. En consecuencia, si $\vec{F}_{ij} \neq \vec{0}$ la partícula j -ésima debería estar rotando en torno a la partícula i -ésima con aceleración angular $\frac{\vec{F}_{ij}}{m_j}$ en ausencia de fuerzas externas pues:

$$\vec{N}_{ij} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times (-\vec{F}_{ij}) = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}$$

Es decir, el vector $\vec{L}_{ij} = m_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j)$ debería estar cambiando como indica la expresión anterior. Como $\vec{F}_{ij} \perp \vec{r}_j - \vec{r}_i \quad \forall i, j = 1, \dots, N$, lo anterior será igual a:

$$\vec{N}_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| F_{ij} \hat{k}$$

siendo \hat{k} el vector unitario perpendicular a \vec{F}_{ij} y a $\vec{r}_i - \vec{r}_j$. Como no tiene sentido que un sólido rígido gire cada vez más rápido o cada vez más despacio por sí mismo, concluimos que necesariamente será:

$$\vec{F}_{ij} = \vec{0} \quad \forall i = 1, \dots, N$$

En consecuencia:

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \vec{0} \quad \forall i, j = 1, \dots, N$$

y, así, las fuerzas $\left\{ \vec{F}_{ij} \right\}_{i,j=1}^N$ son centrales, pues son nulas. Por el teorema 3 en la página 26, obtenemos que:

$$\dot{\vec{J}} = \vec{N}_{ext} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

9. Por lo expuesto en la demostración del punto (8) es:

$$\vec{F}_{ij} = \vec{0} \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Es decir, no hay fuerzas internas. Por el corolario 9 en la página 32, obtenemos:

$$\dot{\vec{T}} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i$$

10. Por lo expuesto en el punto (8), las fuerzas internas son nulas, luego son conservativas. Es más, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $V_{ij} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, N$. De esta forma, como las fuerzas externas son conservativas por hipótesis, podemos aplicar el teorema 4 en la página 34, obteniendo:

$$E = T + V = \text{cte}$$

donde $V = V_{int} + V_{ext}$. No obstante, por lo dicho anteriormente:

$$V_{int} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_{ij} = 0$$

luego $V = V_{ext}$.

Q.E.D.

Corolario 10. *Sea un sólido rígido macizo con función densidad $\rho : V \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ con V medible Lebesgue. Se cumple:*

1. *La posición del centro de masas del sólido rígido viene dado por:*

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \iiint_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV$$

donde $M = \iiint_V \rho(\vec{r}) dV$.

2. *El momento lineal total del sólido rígido coincide con el que tendría una única partícula de masa $M = \iiint_V \rho(\vec{r}) dV$ y que se desplazara con la velocidad del centro de masas $\dot{\vec{R}}$.*

$$\vec{P} = M \dot{\vec{R}} = \iiint_V \rho(\vec{r}) \dot{\vec{r}} dV$$

3. *El momento angular total del sólido rígido con respecto de un punto $O \in \mathbb{R}^3$ puede expresarse como:*

$$\vec{J} = \iiint_V \rho(\vec{r}) (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) dV$$

4. *El momento angular total del sólido rígido visto de un sistema de referencia \mathcal{R} está relacionado con aquél visto por el centro de masas por la ecuación:*

$$\vec{J} = \vec{J}_{C.D.M.} + \vec{J}^*$$

5. *La energía cinética total del sólido rígido puede calcularse como:*

$$T = \iiint_V \frac{1}{2} \rho(\vec{r}) \dot{\vec{r}}^2 dV$$

6. *La energía cinética total del sólido rígido vista desde un sistema de referencia \mathcal{R} está relacionada con aquélla vista por el centro de masas mediante:*

$$T = T_{C.D.M.} + T^*$$

7. *El movimiento del centro de masas del sólido rígido está regido por la ecuación:*

$$\dot{\vec{P}} = M \ddot{\vec{R}} = \iiint_V \vec{F} dV$$

8. *La variación del momento angular total del sólido rígido con respecto de un punto $O \in \mathbb{R}^3$ es debida únicamente a agentes externos y coincide con el momento de fuerzas resultante de las fuerzas externas:*

$$\dot{\vec{J}} = \iiint_V (\vec{r} \times \vec{F}) dV = \vec{N}_{ext}$$

9. La variación de la energía cinética total del sólido rígido se debe exclusivamente a agentes externos y coincide con la potencia generada por las fuerzas externas:

$$\dot{T} = \iiint_V (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}) dV$$

10. Si todas las fuerzas externas que actúan sobre el sólido rígido son conservativas, entonces la energía mecánica del sólido rígido se conserva:

$$E = T + V = \text{cte}$$

donde V depende únicamente de las fuerzas externas.

Demostración. En general, vamos a hacer uso de la proposición 12 en la página 51 y vamos a cambiar la serie infinita por una integral.

1. Se cumple por el corolario 1 en la página 16.

2. Partimos de lo que queremos demostrar:

$$\iiint_V \rho(\vec{r}) \dot{\vec{r}} dV$$

En un instante t fijo, claramente $\dot{\vec{r}}$ es función de \vec{r} . Como $\dot{\vec{r}}$ está acotada, podemos aplicar el teorema 1 en la página 3 para $f(\vec{r}) = \dot{\vec{r}}$ y $n = 3$, obteniendo que existen sucesiones $\{m_{N;i}\}_{i=1}^{(2N)^3}$ y $\{\vec{r}_{N;i}\}_{i=1}^{(2N)^3}$ tales que:

$$\begin{aligned} \iiint_V \rho(\vec{r}) \dot{\vec{r}} dV &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^3} m_{N;i} f(\vec{r}_{N;i}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^3} m_{N;i} \dot{\vec{r}}_{N;i} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{(2N)^3} m_{N;i}}{\sum_{i=1}^{(2N)^3} m_{N;i}}}_{=M} \sum_{i=1}^{(2N)^3} m_{N;i} \dot{\vec{r}}_{N;i} = \lim_{N \rightarrow \infty} M \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{(2N)^3} m_{N;i} \dot{\vec{r}}_{N;i}}{\sum_{i=1}^{(2N)^3} m_{N;i}}}_{=\dot{\vec{R}}} = \lim_{N \rightarrow \infty} M \dot{\vec{R}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \vec{P} \end{aligned}$$

donde el último paso se debe a la proposición 12 en la página 51.

3. Partimos de lo que queremos demostrar:

$$I := \iiint_V \rho(\vec{r}) (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) dV$$

Aplicando el teorema 1 en la página 3, tomando $n = 3$ y $f(\vec{r}) = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$, obtenemos que existen sucesiones $\{m_{N;i}\}_{i=1}^{(2N)^3}$ y $\{\vec{r}_{N;i}\}_{i=1}^{(2N)^3}$ tales que:

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^3} m_{N;i} f(\vec{r}_{N;i}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^3} m_{N;i} (\vec{r}_{N;i} \times \dot{\vec{r}}_{N;i})$$

que es justo el límite cuando el número de partículas tiende a infinito de la expresión dada por la proposición 12 en la página 51 para el momento angular.

4. El resultando se sigue de la proposición 12 en la página 51.

5. Partimos de lo que queremos demostrar:

$$I = \iiint_V \frac{1}{2} \rho(\vec{r}) \dot{\vec{r}}^2 \, dV = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(\vec{r}) \dot{\vec{r}}^2 \, dV$$

Aplicando el teorema 1 en la página 3, tomando $n = 3$ y $f(\vec{r}) = \dot{\vec{r}}^2$, obtenemos que existen sucesiones $\{m_{N;i}\}_{i=1}^{(2N)^3}$ y $\{\vec{r}_{N;i}\}_{i=1}^{(2N)^3}$ tales que:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^3} m_{N;i} f(\vec{r}_{N;i}) = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^3} m_{N;i} \dot{\vec{r}}_{N;i}^2 = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^3} \frac{1}{2} m_{N;i} \dot{\vec{r}}_{N;i}^2 \end{aligned}$$

que es justo el resultado dado por la proposición 12 en la página 51 para la energía cinética de un sistema de $(2N)^3$ partículas.

6. El resultando se sigue de la proposición 12 en la página 51.

7. Partimos de lo que queremos demostrar:

$$I = \iiint_V \vec{F}(\vec{r}) \, dV = \iiint_V \rho(\vec{r}) \vec{a}(\vec{r}) \, dV$$

Aplicando el teorema 1 en la página 3, tomando $n = 3$ y $f(\vec{r}) = \vec{a}(\vec{r})$, obtenemos que existen sucesiones $\{m_{N;i}\}_{i=1}^{(2N)^3}$ y $\{\vec{r}_{N;i}\}_{i=1}^{(2N)^3}$ tales que:

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^3} m_{N;i} \vec{a}(\vec{r}_{N;i})$$

Y aplicando la segunda ley de Newton para un sistema de partículas (ver teorema 2 en la página 18), obtenemos:

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^3} \vec{F}_{N;i} = \lim_{N \rightarrow \infty} M \ddot{\vec{R}}$$

donde el último paso se debe a la proposición 12 en la página 51.

8. Partimos de lo que queremos demostrar:

$$I = \iiint_V (\vec{r} \times \vec{F}(\vec{r})) \, dV = \iiint_V \rho(\vec{r}) (\vec{r} \times \vec{a}(\vec{r})) \, dV$$

Aplicando el teorema 1 en la página 3, tomando $n = 3$ y $f(\vec{r}) = \vec{r} \times \vec{a}(\vec{r})$, obtenemos que existen sucesiones $\{m_{N;i}\}_{i=1}^{(2N)^3}$ y $\{\vec{r}_{N;i}\}_{i=1}^{(2N)^3}$ tales que:

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^3} m_{N;i} f(\vec{r}_{N;i}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^3} m_{N;i} \left(\vec{r}_{N;i} \times \underbrace{\vec{a}(\vec{r}_{N;i})}_{=: \vec{a}_{N;i}} \right) =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^3} m_{N;i} (\vec{r}_{N;i} \times \vec{a}_{N;i}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^3} (\vec{r}_{N;i} \times \vec{F}_{N;i})$$

donde hemos aplicado la segunda ley de Newton para un sistema de partículas (ver teorema 2 en la página 18). Por la proposición 12 en la página 51, tenemos:

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^3} (\vec{r}_{N;i} \times \vec{F}_{N;i}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \dot{\vec{J}}$$

9. Partimos de lo que queremos demostrar:

$$I = \iiint_V (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}(\vec{r})) dV = \iiint_V \rho(\vec{r}) (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{a}(\vec{r}))$$

Aplicando el teorema 1 en la página 3, tomando $n = 3$ y $f(\vec{r}) = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{a}(\vec{r})$, obtenemos que existen sucesiones $\{m_{N;i}\}_{i=1}^{(2N)^3}$ y $\{\vec{r}_{N;i}\}_{i=1}^{(2N)^3}$ tales que:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^3} m_{N;i} f(\vec{r}_{N;i}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^3} m_{N;i} \left(\dot{\vec{r}}_{N;i} \cdot \underbrace{\vec{a}(\vec{r}_{N;i})}_{=: \vec{a}_{N;i}} \right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^3} m_{N;i} (\dot{\vec{r}}_{N;i} \cdot \vec{a}_{N;i}) \end{aligned}$$

Y aplicando la segunda ley de Newton para un sistema de partículas (ver teorema 2 en la página 18), obtenemos:

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{(2N)^3} \dot{\vec{r}}_{N;i} \cdot \vec{F}_{N;i}$$

Por la proposición 12 en la página 51, llegamos a:

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \dot{\vec{T}}$$

10. El resultado se sigue de la proposición 12 en la página 51.

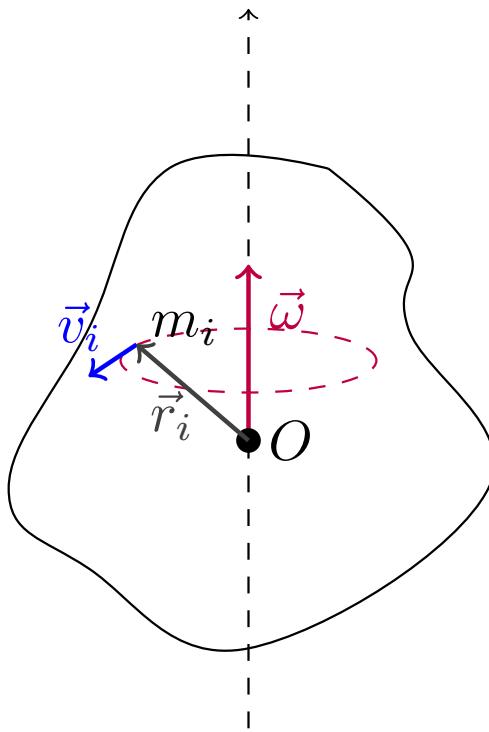
Q.E.D.

2.3. Rotación en torno a un eje

Proposición 13. Una partícula describe un movimiento circular en torno a un eje Z si y sólo si $r = cte$ y existe una función vectorial $\vec{\omega}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\omega} \parallel \hat{k} \forall t$, siendo \hat{k} el vector unitario del eje Z , y:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

(donde \vec{v} es el vector velocidad de la partícula y \vec{r} es su vector posición) para todo sistema de referencia inercial cuyo origen esté situado en el eje de giro Z .



Demostración.

- \Leftarrow : Partimos de que $r = \text{cte}$ y de que existe $\vec{\omega}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\omega} \parallel \hat{k}$ $\forall t$ y $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ para todo sistema de referencia inercial situado cuyo origen se encuentra en el eje Z . Debemos probar que la partícula sigue una trayectoria circular y que dicha trayectoria está contenida en el plano $z = z_0$ para algún $z_0 \in \mathbb{R}$.

Esto último es sencillo:

$$\begin{aligned} \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} &\Leftrightarrow (v_x, v_y, v_z) = (0, 0, \omega) \times (x, y, z) = \\ &= \omega \hat{k} \times (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) = x \omega \hat{j} - y \omega \hat{i} = (-y\omega, x\omega, 0) \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Luego el vector \vec{v} está contenido en el plano $z = 0$. De esta forma, vemos que la componente z de la posición de la partícula \vec{r} no puede cambiar, luego la trayectoria de la partícula estará contenida en un plano paralelo al $z = 0$.

Ahora, veamos que la trayectoria es circular. Sabemos que $r = \text{cte}$; es decir:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{cte} \Leftrightarrow r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \text{cte}$$

Por el razonamiento hecho anteriormente, debe ser $z^2 = \text{cte}$. En consecuencia:

$$x^2 + y^2 = r^2 - z^2 = \text{cte}$$

Nótese que lo anterior siempre está bien definido pues $r \geq z \Leftrightarrow r^2 \geq z^2$. En resumen, llegamos a:

$$x^2 + y^2 = \text{cte}$$

que es la ecuación de un círculo centrado en el origen en coordenadas cartesianas.

- \Rightarrow : Partimos de que la trayectoria de la partícula es una circunferencia contenida en el plano $z = z_0$ para algún $z_0 \in \mathbb{R}$. Entonces es:

$$(x^2 + y^2 = \text{cte}) \wedge (z = \text{cte}) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \text{cte} \Leftrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{cte}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = \text{cte} &\Leftrightarrow 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0 \Leftrightarrow x\dot{x} = -y\dot{y} \Leftrightarrow \dot{x} = -\frac{y}{x}\dot{y} \\ z = \text{cte} &\Leftrightarrow \dot{z} = 0 \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Si tomamos $\vec{\omega}(t) = (0, 0, \omega(t))$, entonces, por la ecuación 2.3.1 en la página anterior, obtenemos:

$$\vec{v} = (-y\omega, x\omega, 0)$$

que satisface la ecuación 2.3.2, pues:

$$-\frac{y}{x}\dot{y} = -\frac{y}{x}x\omega = -y\omega = \dot{x}$$

Q.E.D.

Observación 12. El enunciado de la proposición 13 en la página 57 nos indica que en un movimiento circular el vector posición \vec{r}_i precede con velocidad angular ω .

2.3.1. Momento angular

Proposición 14. *Sea un sólido rígido de N partículas que rota en torno a un eje Z con velocidad angular ω . Su momento angular respecto de un punto O viene dado por la expresión:*

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^N m_i (-x_i z_i, -y_i z_i, x_i^2 + y_i^2) \omega$$

Demostración. Por la proposición 12 en la página 51, tenemos:

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \quad (2.3.3)$$

Por otra parte, como el sólido rígido rota en torno al eje Z , cada una de sus partículas describirá una trayectoria circular en torno a dicho eje. Por la proposición 13 en la página 57, tenemos que:

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \omega \hat{k} \times \vec{r}_i$$

Sustituyendo en la ecuación 2.3.3, tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times (\omega \hat{k} \times \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N \omega m_i \vec{r}_i \times (\hat{k} \times (x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k})) = \\ &= \sum_{i=1}^N \omega m_i (x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}) \times (x_i \hat{j} - y_i \hat{i}) = \sum_{i=1}^N \omega m_i (x_i^2 \hat{k} + y_i^2 \hat{k} - x_i z_i \hat{i} - y_i z_i \hat{j}) = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (-x_i z_i, -y_i z_i, x_i^2 + y_i^2) \omega \end{aligned}$$

Q.E.D.

Como vemos en la proposición 14, aunque $\vec{\omega}$ sólo tiene dirección \hat{k} , \vec{J}_i tiene componentes en todos los ejes. Por ahora, vamos a olvidarnos de las coordenadas x e y del momento angular y vamos a centrarnos en la componente z .

Definición 14. Sea un sólido rígido de N partículas que está girando en torno a un eje Z . Llamamos **momento de inercia respecto al eje de giro I_z** al factor por el que hay que multiplicar la velocidad angular ω para obtener la componente z del momento angular respecto de un punto O .

Corolario 11. *Sea un sólido rígido de N partículas que está rotando en torno a un eje Z . Su momento de inercia con respecto al eje de giro Z viene dado por la expresión:*

$$I_z = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Demostración. Por la proposición 14 en la página anterior, tenemos que:

$$J_z = \omega \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Por analogía con la definición 14, llegamos al enunciado. Q.E.D.

Proposición 15 (Ecuación del movimiento de un sólido rígido en rotación). *Sea un sólido rígido de N partículas que está rotando en torno a un eje Z . La variación de la componente z de su momento angular con respecto de un punto O puede expresarse como:*

$$\dot{J}_z = I_z \dot{\omega} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) \dot{\omega}$$

Además, siempre existen $\{\rho_i\}_{i=1}^N$ y $\{F_{\varphi,i}\}_{i=1}^N$ tales que:

$$\dot{J}_z = \sum_{i=1}^N \rho_i F_{\varphi,i}$$

donde ρ_i es una distancia y $F_{\varphi,i}$ es una fuerza contenida en el plano XY .

Demostración. Por la proposición 14 en la página anterior, tenemos:

$$J_z = \omega \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Derivando con respecto al tiempo a ambos lados, obtenemos:

$$\dot{J}_z = \dot{\omega} \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) + \omega \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} (x_i^2 + y_i^2)$$

pues la derivada es lineal. No obstante, por definición de sólido rígido (ver definición 13 en la página 50), el término $(x_i^2 + y_i^2)$ debe ser constante en el tiempo. Así, obtenemos:

$$\dot{J}_z = \dot{\omega} \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) \tag{2.3.4}$$

y, por el corolario 11, es:

$$\dot{J}_z = I_z \dot{\omega}$$

Ahora, llamando $\rho_i^2 := x_i^2 + y_i^2 \forall i = 1, \dots, N$, podemos expresar la ecuación 2.3.4 en la página anterior como:

$$\dot{J}_z = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2 \dot{\omega}$$

Tomando, $\varphi := \int_0^t \omega d\tau$, podemos expresar lo anterior como:

$$\dot{J}_z = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2 \ddot{\varphi}$$

donde φ es ahora un ángulo. De hecho, el ángulo φ correspondiente a las coordenadas cilíndricas en torno al eje Z . Ahora, nótese:

$$\dot{J}_z = \sum_{i=1}^N \rho_i m_i \rho_i \ddot{\varphi}$$

Démonos cuenta de que el término $m_i \rho_i \ddot{\varphi} := F_{\varphi,i}$ tiene efectivamente unidades de fuerza:

$$[F_{\varphi,i}] = \text{masa} \cdot \text{longitud} \cdot \frac{1}{\text{tiempo}^2} = \text{masa} \cdot \text{aceleración} = \text{fuerza}$$

Además, claramente $\rho_i \ddot{\varphi}$ es una aceleración lineal contenida en el plano XY , pues indica una variación de φ , que está, a su vez, contenido en dicho plano. Así, $F_{\varphi,i}$ estará, necesariamente, contenido en el plano XY . **Q.E.D.**

Observación 13. La proposición 15 en la página anterior nos indica que únicamente las fuerzas contenidas en el plano XY y que actúen a una distancia no nula del eje de giro serán capaces de variar el momento angular del sólido rígido en torno al eje de giro.

2.3.2. Energía cinética

Proposición 16. *Sea un sólido rígido de N partículas que está rotando en torno a un eje Z . Su energía cinética de rotación puede expresarse en función de la velocidad angular ω y del momento de inercia con respecto al eje de giro como sigue:*

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Además, siempre existen $\{\rho_i\}_{i=1}^N$ y $\{F_{\varphi,i}\}_{i=1}^N$ tales que:

$$\dot{T} = I_z \omega \dot{\omega} = \omega \sum_{i=1}^N \rho_i F_{\varphi,i}$$

donde ρ_i es una distancia y $F_{\varphi,i}$ es una fuerza contenida en el plano XY .

Demostración. Por el corolario 8 en la página 30, tenemos:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 \tag{2.3.5}$$

Como cada partícula describe una trayectoria circular en torno al eje de giro, por la proposición 13 en la página 57, será:

$$\begin{aligned} \dot{r}_i &= |\vec{\omega} \times \vec{r}_i| = \left| \omega \hat{k} \times (x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}) \right| = \left| \omega x_i \hat{j} - \omega y_i \hat{i} \right| = \omega \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \dot{r}_i^2 = \omega^2 (x_i^2 + y_i^2) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación 2.3.5 en la página anterior, llegamos a:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \omega^2 (x_i^2 + y_i^2) = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (2.3.6)$$

Por el corolario 11 en la página 60, podemos expresar lo anterior como:

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Por otra parte, partamos de la ecuación 2.3.6 y definamos $\rho_i^2 := x_i^2 + y_i^2 \forall i = 1, \dots, N$. Así, la mencionada ecuación queda:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2$$

Derivando a ambos lados, obtenemos:

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 2\omega \dot{\omega} = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2 \omega \dot{\omega} \quad (2.3.7)$$

Por el corolario 11 en la página 60, tenemos que:

$$\dot{T} = I_z \omega \dot{\omega}$$

Volviendo a la ecuación 2.3.7 y tomando $\varphi := \int_0^t \omega d\tau$, obtenemos:

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2 \omega \ddot{\varphi} = \omega \sum_{i=1}^N \rho_i m_i \rho_i \ddot{\varphi}$$

donde φ es ahora un ángulo. De hecho, el ángulo φ correspondiente a las coordenadas cilíndricas en torno al eje Z . Démonos cuenta de que el término $m_i \rho_i \ddot{\varphi} := F_{\varphi,i}$ tiene efectivamente unidades de fuerza:

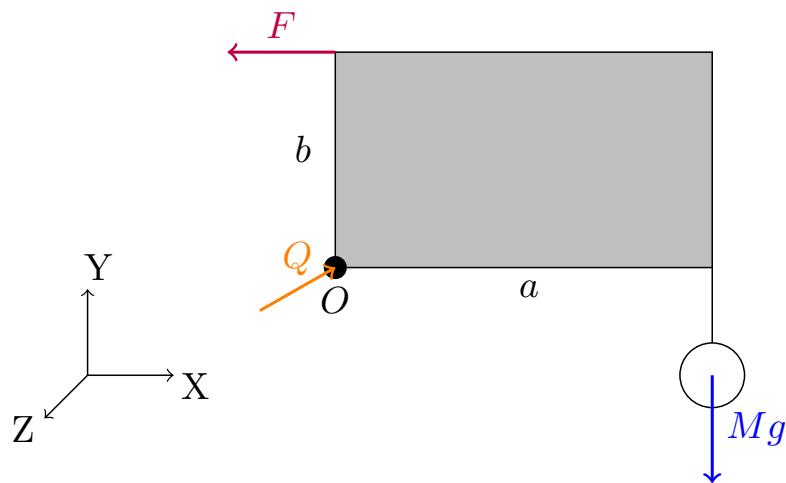
$$[F_{\varphi,i}] = \text{masa} \cdot \text{longitud} \cdot \frac{1}{\text{tiempo}^2} = \text{masa} \cdot \text{aceleración} = \text{fuerza}$$

Además, claramente $\rho_i \ddot{\varphi}$ es una aceleración lineal contenida en el plano XY , pues indica una variación de φ , que está, a su vez, contenido en dicho plano. Así, $F_{\varphi,i}$ estará, necesariamente, contenido en el plano XY . $\mathbb{Q.E.D.}$

Observación 14. Con la proposición 16 en la página anterior, obtenemos una conclusión análoga a la de la proposición 15 en la página 60: únicamente las fuerzas que se encuentran en el plano XY y que no actúan sobre algún punto del eje serán capaces de cambiar la energía cinética de un sólido rígido en rotación con respecto a un eje.

Observación 15. Con las proposiciones 15 en la página 60 y 16 en la página anterior no podemos estudiar las reacciones que ocurren en el eje, pues $\rho_i = 0$ en el eje. Para estudiarlas, tendremos que trabajar con el momento lineal.

Ejemplo 6. Tenemos una varilla rectangular de lados a y b que puede rotar sobre uno de sus vértices. De otro de sus vértices cuelga una masa M . Otro extremo está anclado mediante una tensión F de manera que el sistema está en equilibrio.



Por la proposición 12 en la página 51, será:

$$\dot{J} = bF - aMg$$

Como el sistema está en equilibrio, necesariamente es $\dot{J} = 0$. Así:

$$\dot{J} = 0 \Leftrightarrow F = \frac{a}{b}Mg$$

Como hemos mencionado en la observación 13 en la página 61, la ecuación anterior no nos da ninguna información sobre las reacciones en el eje. Para ello, tendremos que usar la variación del momento lineal (según dada por la proposición 12 en la página 51):

$$\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} = \vec{Q} + \vec{F} + M\vec{g} = \vec{Q} - F\hat{i} - mg\hat{j}$$

donde \vec{Q} es la reacción en el eje. Para que haya equilibrio, debe ser $\dot{\vec{P}} = \vec{0}$. En consecuencia:

$$\dot{\vec{P}} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{Q} = (F, Mg, 0)$$

Estudiemos el movimiento del centro de masas de la varilla. Como la varilla rota en torno a un eje fijo Z , su centro de masas describirá una trayectoria circular en torno al eje de giro. En consecuencia, por la proposición 14 en la página 59, tendremos:

$$\dot{\vec{R}} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

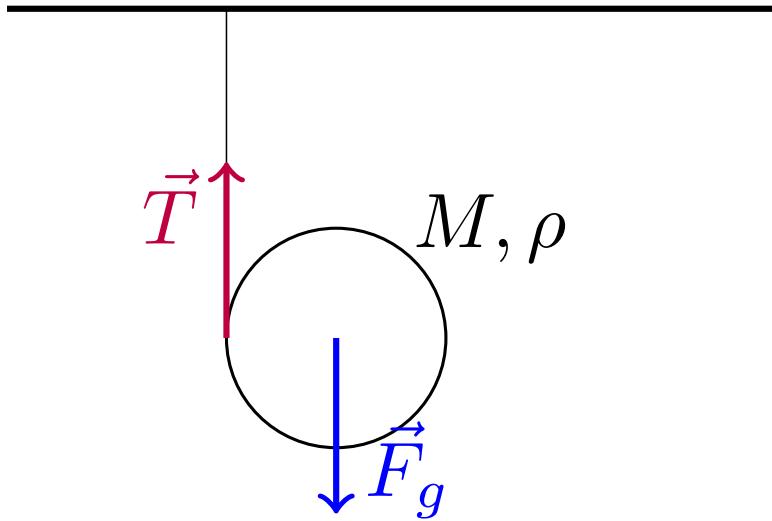
donde la ecuación anterior indica que el centro de masas realiza una trayectoria de radio R en torno al eje de giro. Hallemos la aceleración del centro de masas. Para ello, simplemente derivamos en la ecuación anterior, obteniendo:

$$\ddot{\vec{R}} = \vec{\omega} \times \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{R}} = \vec{\omega} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

donde el primer término es la aceleración tangencial $a_t = R\dot{\omega}$ y el segundo término es la aceleración radial $a_r = -\omega^2 R$.

Q.E.F.

Ejemplo 7. Tenemos una cuerda que cuelga del techo y que hemos enrollado alrededor de un cilindro de radio ρ . Tomamos el origen de coordenadas en el centro del cilindro. Nos piden hallar la tensión en la cuerda y hallar la velocidad angular en torno al origen, la aceleración lineal del cilindro y la aceleración angular en torno al origen.



Como el sólido rígido está rotando en torno a un eje fijo, por la proposición 12 en la página 51 y la proposición 15 en la página 60, tenemos:

$$N = J = T\rho = I\ddot{\theta} \Leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{T\rho}{I} \quad (2.3.8)$$

Además, por la segunda ley de Newton:

$$-T + Mg = M\ddot{y} \Leftrightarrow \ddot{y} = \frac{Mg - T}{M} \quad (2.3.9)$$

Como estamos en un movimiento de rodadura es $y = \rho\theta$ y, en consecuencia:

$$\ddot{y} = \rho\ddot{\theta}$$

Sustituyendo esto último en la ecuación 2.3.9, obtenemos:

$$\rho\ddot{\theta} = \frac{Mg - T}{M}$$

Haciendo uso de la ecuación 2.3.8, llegamos a:

$$\frac{T\rho^2}{I} = \frac{Mg - T}{M} \Leftrightarrow \frac{M\rho^2}{I}T = Mg - T \Leftrightarrow \left(\frac{M\rho^2}{I} + 1\right)T = Mg \Leftrightarrow T = \frac{Mg}{1 + \frac{M\rho^2}{I}} = \frac{MgI}{I + M\rho^2} \quad (2.3.10)$$

Por otra parte, por este enlace¹, sabemos que el momento de inercia de un cilindro en torno a su eje de simetría central es:

$$I = \frac{1}{2}M\rho^2 \quad (2.3.11)$$

Sustituyendo en la ecuación 2.3.10, tenemos:

$$T = \frac{Mg}{1 + \frac{\frac{1}{2}M\rho^2}{M\rho^2}} = \frac{Mg}{1 + 2} = \frac{1}{3}Mg$$

¹https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=List_of_moments_of_inertia&oldid=887735536

Haciendo uso de la ecuación 2.3.8 en la página anterior:

$$\ddot{\theta} = \frac{T\rho}{I} = \frac{\frac{1}{3}Mg\rho}{\frac{1}{2}M\rho^2} = \frac{2}{3}\frac{g}{\rho} \Leftrightarrow \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{2g}{3\rho} \Leftrightarrow \int_{\omega_0}^{\dot{\theta}} d\dot{\theta} = \int_0^t \frac{2g}{3\rho} d\tau \Leftrightarrow \dot{\theta} = \omega_0 + \frac{2}{3}\frac{g}{\rho}t$$

Análogamente con la ecuación 2.3.9 en la página anterior, obtenemos:

$$\ddot{y} = \rho\ddot{\theta} = \frac{2}{3}g \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{2}{3}g \Leftrightarrow \int_{v_0}^{\dot{y}} d\dot{y} = \int_0^t \frac{2}{3}g d\tau \Leftrightarrow \dot{y} = v_0 + \frac{2}{3}gt$$

Q.E.F.

Alternativamente, podríamos haber hecho este ejercicio por lagrangianos. Haciendo uso de la proposición 16 en la página 61, podemos escribir la energía cinética del cuerpo:

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}^2$$

Como estamos ante un movimiento de rodadura, podemos expresar lo anterior únicamente en función de θ :

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\rho^2\dot{\theta}^2$$

Por otra parte, la energía potencial es únicamente:

$$V = -Mgy = -Mg\rho\theta$$

En consecuencia:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\rho^2\dot{\theta}^2 + Mg\rho\theta$$

Hallemos las parciales:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = Mg\rho$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = I\dot{\theta} + M\rho^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = I\ddot{\theta} + M\rho^2\ddot{\theta}$$

Y, haciendo uso de la ecuación 2.3.11 en la página anterior, podemos expresar lo anterior como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{1}{2}M\rho^2\ddot{\theta} + M\rho\ddot{\theta} = \frac{3}{2}M\rho^2\ddot{\theta}$$

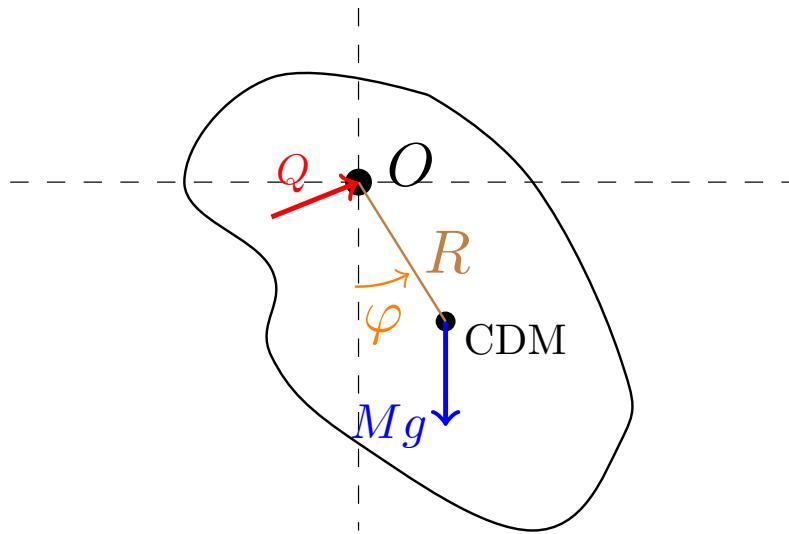
Por el teorema 5 en la página 35, debe ser:

$$\frac{3}{2}M\rho^2\ddot{\theta} = Mg\rho \Leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{Mg\rho}{\frac{3}{2}M\rho^2} = \frac{2}{3}\frac{g}{\rho}$$

De forma que hemos llegado a la misma ecuación del movimiento que aplicando las leyes de Newton y la ecuación del sólido rígido en rotación. Integrando como hemos hecho en la versión anterior, se obtienen las velocidades que se nos solicitan.

Q.E.F.

Ejemplo 8 (péndulo físico). Tenemos un sólido rígido con momento de inercia I con una forma arbitraria clavado en un punto O y lo sepáramos del equilibrio. Nos piden hallar su periodo (suponiendo pequeñas oscilaciones) y la reacción Q .



Vamos a hacer el ejercicio mediante lagrangianos. Por la proposición 16 en la página 61, tenemos que:

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$$

Por otra parte, la energía potencial queda:

$$V = -MgR \cos \varphi$$

Así:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + MgR \cos \varphi$$

Hallamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -MgR \operatorname{sen} \varphi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = I\dot{\varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = I\ddot{\varphi}$$

Por el teorema 5 en la página 35, debe ser:

$$I\ddot{\varphi} = -MgR \operatorname{sen} \varphi \Leftrightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{MR}{I}g \operatorname{sen} \varphi \Leftrightarrow \ddot{\varphi} + \frac{MgR}{I} \operatorname{sen} \varphi = 0 \quad (2.3.12)$$

En la aproximación de pequeñas oscilaciones es $\operatorname{sen} \varphi \approx \varphi$ y, por consiguiente:

$$\ddot{\varphi} + \frac{MgR}{I} \varphi \approx 0$$

Por analogía con la ecuación diferencial de un movimiento armónico, obtenemos:

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{MgR}{I}}_{=\omega^2} \varphi = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{MgR}{I} \Leftrightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{MgR}{I} \Leftrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 I}{MgR} \Leftrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MgR}}$$

Vamos a llamar $l = \frac{I}{MR}$ longitud del péndulo equivalente. En función de dicho parámetro, obtenemos que el periodo es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Ahora, queremos hallar el valor de la reacción Q . Para ello, vamos a aplicar la proposición 12 en la página 51, por lo que:

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = M\ddot{\vec{R}} = \vec{Q} + M\vec{g} \quad (2.3.13)$$

De la ecuación anterior desconocemos $\ddot{\vec{R}}$, hallémosla:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= (R \sin \varphi, R \cos \varphi, 0) \\ \dot{\vec{R}} &= (R \cos \varphi \dot{\varphi}, -R \sin \varphi \dot{\varphi}, 0) \\ \ddot{\vec{R}} &= (-R \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + R \cos \varphi \ddot{\varphi}, -R \cos \varphi \dot{\varphi}^2 - R \sin \varphi \ddot{\varphi}, 0) \end{aligned}$$

Así, a partir de la ecuación 2.3.13, obtenemos:

$$\begin{aligned} M\ddot{\vec{R}} &= (Q_x, Q_y - Mg, 0) \Leftrightarrow \\ \vec{Q} &= (-MR \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + MR \cos \varphi \ddot{\varphi}, -MR \cos \varphi \dot{\varphi}^2 - MR \sin \varphi \ddot{\varphi} - Mg, 0) \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Por otra parte, como todas las fuerzas que actúan sobre el sistema son conservativas, la energía debe conservarse. Así:

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 - MgR \cos \varphi = E \Leftrightarrow \dot{\varphi}^2 = \frac{2}{I}(E + MgR \cos \varphi)$$

Podemos expresar lo anterior como:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2MgR}{I} (\cos \varphi + K) \quad (2.3.15)$$

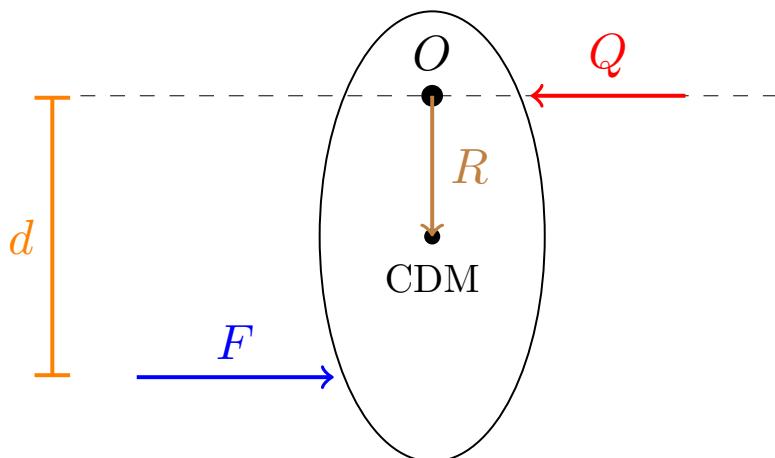
donde K es una constante.

De esta forma, mediante las ecuaciones 2.3.15 y 2.3.12 en la página anterior, podemos expresar 2.3.14 como:

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= \left(-MR \sin \varphi \frac{2MgR}{I} [\cos \varphi + K] - MR \cos \varphi \frac{MR}{I} g \sin \varphi, \right. \\ &\quad \left. -MR \cos \varphi \frac{2MgR}{I} [\cos \varphi + K] + MR \sin \varphi \frac{MR}{I} g \sin \varphi, 0 \right) = \\ &= \left(-\frac{2g}{I} M^2 R^2 \sin \varphi [\cos \varphi + K] - \frac{g}{I} M^2 R^2 \sin \varphi \cos \varphi, -\frac{2g}{I} M^2 R^2 \cos \varphi [\cos \varphi + K] + \frac{g}{I} M^2 R^2 \sin^2 \varphi, 0 \right) \end{aligned}$$

Q.E.F.

Ejemplo 9. Tenemos un sólido rígido con una forma arbitraria anclado en un punto O .



En un momento, el sólido rígido que se encontraba en equilibrio, recibe un impulso. ¿Existe alguna distancia d que anule la reacción Q ? Para ello, vamos a llamar:

$$K := \int F dt, \quad S := \int Q dt$$

Vamos a trabajar, como hemos hecho en los ejemplos 7 en la página 63 y 8 en la página 65, con la segunda ley de Newton para un sistema de partículas.

$$\frac{dP}{dt} = \sum_{i=1}^N F_{ext} \Leftrightarrow dP = F dt - Q dt \Leftrightarrow P_f - P_i = \int F dt - \int Q dt = K - S \quad (2.3.16)$$

Hallemos las velocidades inicial y final del centro de masas:

$$v_i = 0 \quad v_f = R\omega$$

pues el centro de masas estará describiendo una trayectoria circular en torno al origen. En consecuencia, de la ecuación 2.3.16, obtenemos:

$$P_f - P_i = MR\omega - M \cdot 0 = MR\omega = K - S \quad (2.3.17)$$

Por otra parte, por la proposición 12 en la página 51, tenemos:

$$\dot{\vec{J}} = \vec{N}_{ext} \Leftrightarrow I \frac{d\omega}{dt} = Fd \Leftrightarrow d\omega = \frac{Fd}{I} dt \Leftrightarrow \omega = \frac{d}{I} \int F dt = \frac{Kd}{I} \quad (2.3.18)$$

Usando las ecuaciones 2.3.17 y 2.3.18, obtenemos:

$$MR \frac{Kd}{I} = K - S \Leftrightarrow S = K \left(1 - \frac{MR}{I} d \right)$$

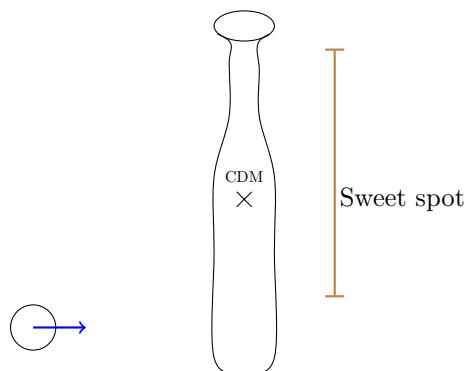
donde recordemos $l = \frac{I}{MR}$ es lo que llamábamos longitud equivalente del péndulo físico (al igual que en el ejemplo 8 en la página 65). Así, tenemos:

$$S = K \left(1 - \frac{d}{l} \right)$$

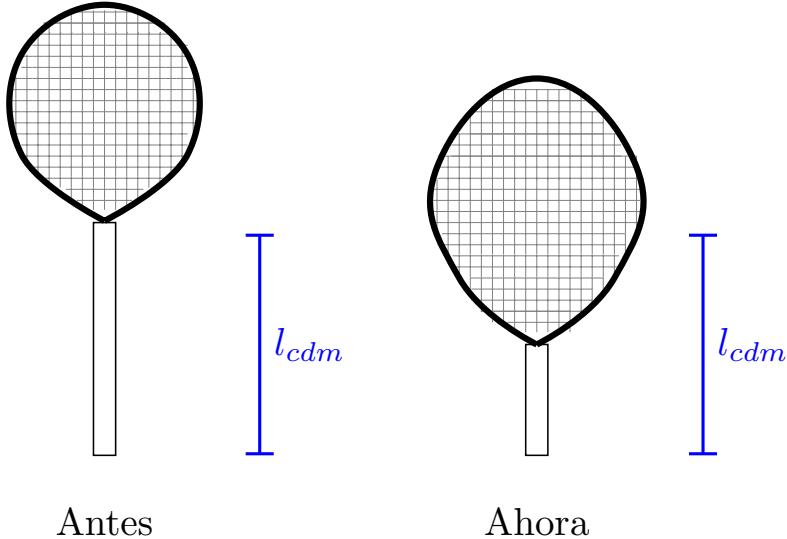
Observando la fórmula anterior vemos que si $d = l$, entonces $S = 0$. Es decir, la fuerza F se realiza a una distancia vertical l del punto de apoyo, entonces la reacción del punto de apoyo sobre el sólido rígido es nula.

Q.E.F.

La situación descrita en el ejemplo 9 en la página anterior aparece sobre todo en deportes en los que se golpean pelotas con un palo. Por ejemplo, en béisbol, hay una distancia privilegiada en la que el jugador no debe hacer esfuerzo en sujetar el bate, lo que recibe el nombre de «*sweet spot*» en inglés.



Algo similar ocurre en la historia de las raquetas de tenis. Antes, éstas eran mucho más alargadas y su diseño se cambió precisamente porque en el diseño antiguo el punto óptimo se encontraba fuera de la zona de golpeo.



2.3.3. Componentes perpendiculares de \vec{J}

Definición 15. Sea un sólido rígido de N partículas que está rotando en torno a un eje Z . Llamamos **vector de inercia con respecto al eje de giro** $\vec{I} = (I_{xz}, I_{yz}, I_{zz})$ al vector tal que:

$$\vec{J} = \omega \vec{I} \Leftrightarrow (J_x, J_y, J_z) = (I_{xz}\omega, I_{yz}\omega, I_{zz}\omega)$$

Corolario 12. *Sea un sólido rígido de N partículas que está rotando en torno a un eje Z . El vector de inercia dado en la definición 15 responde a la expresión:*

$$\begin{aligned} I_{xz} &= - \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \\ I_{yz} &= - \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \\ I_{zz} &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{aligned}$$

Demostración. La componente I_{zz} es la mencionada en el enunciado por el corolario 11 en la página 60. Para el resto, partimos de la proposición 14 en la página 59:

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \sum_{i=1}^N m_i (-x_i z_i, -y_i z_i, x_i^2 + y_i^2) \omega \Rightarrow \\ \Rightarrow (J_x, J_y) &= \left(- \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i, - \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \right) \omega \end{aligned}$$

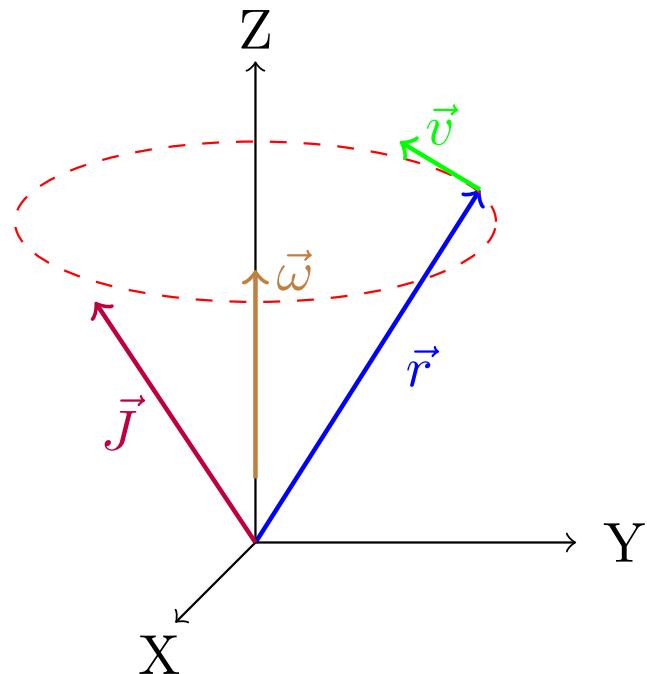
Por analogía con la definición 15 en la página anterior, deducimos que:

$$I_{xz} = - \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i, \quad I_{yz} = - \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i$$

Q.E.D.

Observación 16. Recordemos que el enunciado de la proposición 14 en la página 59 nos indica que, en general, es $\vec{J} \nparallel \vec{\omega}$.

Ejemplo 10. Consideremos el sólido rígido más sencillo que podemos imaginar: una única partícula de masa m a distancia r del origen. Supongamos que el vector \vec{r} precede con respecto al eje Z con velocidad angular ω .

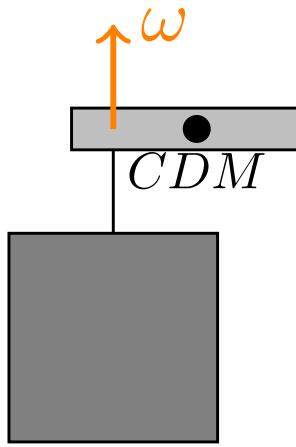


En este caso, por la proposición 12 en la página 51, tenemos:

$$\vec{J} = \vec{r} \times m\vec{v} \Rightarrow \vec{J} \perp \vec{r}$$

Es decir, en este caso, claramente $\vec{J} \nparallel \vec{\omega}$. Es más, \vec{J} precede, por lo que $\exists \dot{\vec{J}} \Rightarrow \exists \vec{N}_{ext}$, es decir, aparecerá una fuerza resultante de momentos de reacción. Es decir, aparece una fuerza que intenta cambiar el eje de giro del sistema. En consecuencia, esto nos indica que un sistema real de este estilo podría sufrir desgaste en el eje de giro debido a la acción de la mencionada fuerza.

Ejemplo 11. En el interior de nuestros teléfonos móviles hay un motor muy pequeño unido a un disco descentrado.



Esto constituye el vibrador. Como podemos ver, en este dispositivo ocurre lo mismo que en el ejemplo 10 en la página anterior, pues es $\vec{J} \nparallel \vec{\omega}$.

2.4. Tensor de inercia

2.4.1. Endomorfismo de inercia

A partir de este momento, la velocidad angular $\vec{\omega}$ podrá ir a lo largo de un eje arbitrario cualquiera. Así, en principio, $\vec{\omega}$ tendrá componentes en las tres direcciones:

$$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

Proposición 17. *Sea un sólido rígido de N partículas. Si estamos trabajando en una base ortonormal, existe una matriz simétrica $\vec{\mathbb{I}} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ tal que el momento angular del sólido rígido puede obtenerse como la acción de la matriz $\vec{\mathbb{I}}$ sobre la velocidad angular $\vec{\omega}$.*

$$\vec{J} = \vec{\mathbb{I}}\vec{\omega}$$

Además, las componentes de dicha matriz vienen dadas por:

$$I_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k (\delta_{ij} r_k^2 - r_{k,i} r_{k,j}) \quad \forall i, j = x, y, z$$

donde $r_k^2 = r_{k,x}^2 + r_{k,y}^2 + r_{k,z}^2$.

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que nuestra base ortonormal es la canónica. Por la proposición 12 en la página 51, tenemos que:

$$\vec{J} = \sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k \times \dot{\vec{r}}_k \tag{2.4.1}$$

Por otra parte, las partículas del sólido rígido describirán trayectorias circulares en torno al vector $\vec{\omega}$. En consecuencia, por la proposición 13 en la página 57, será:

$$\dot{\vec{r}}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación 2.4.1 en la página anterior, llegamos a:

$$\begin{aligned}
 \vec{J} &= \sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) = \sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k \times \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix} = \\
 &= \sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k \times (\omega_y z_k - \omega_z y_k, \omega_z x_k - \omega_x z_k, \omega_x y_k - \omega_y x_k) = \\
 &= \sum_{k=1}^N m_k \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_k & y_k & z_k \\ \omega_y z_k - \omega_z y_k & \omega_z x_k - \omega_x z_k & \omega_x y_k - \omega_y x_k \end{vmatrix} = \\
 &= \sum_{k=1}^N m_k (\omega_x y_k^2 - \omega_y x_k y_k - \omega_z x_k z_k + \omega_x z_k^2, \\
 &\quad \omega_y z_k^2 - \omega_z y_k z_k - \omega_x x_k y_k + \omega_y x_k^2, \omega_z x_k^2 - \omega_x x_k z_k - \omega_y y_k z_k + \omega_z y_k^2) = \\
 &= \sum_{k=1}^N m_k ([y_k^2 + z_k^2] \omega_x - x_k y_k \omega_y - x_k z_k \omega_z, [x_k^2 + z_k^2] \omega_y - x_k y_k \omega_x - y_k z_k \omega_z, = \\
 &\quad [x_k^2 + y_k^2] \omega_z - x_k z_k \omega_x - y_k z_k \omega_y) = \\
 &= \sum_{k=1}^N m_k [(y_k^2 + z_k^2, -x_k y_k, -x_k z_k) \omega_x + (-x_k y_k, x_k^2 + z_k^2, -y_k z_k) \omega_y + (-x_k z_k, -y_k z_k, x_k^2 + y_k^2) \omega_z] = \\
 &= \sum_{k=1}^N m_k \begin{pmatrix} y_k^2 + z_k^2 & -x_k y_k & -x_k z_k \\ -x_k y_k & x_k^2 + z_k^2 & -y_k z_k \\ -x_k z_k & -y_k z_k & x_k^2 + y_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \\
 &= \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N m_k (y_k^2 + z_k^2) & \sum_{k=1}^N m_k (-x_k y_k) & \sum_{k=1}^N m_k (-x_k z_k) \\ \sum_{k=1}^N m_k (-x_k y_k) & \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + z_k^2) & \sum_{k=1}^N m_k (-y_k z_k) \\ \sum_{k=1}^N m_k (-x_k z_k) & \sum_{k=1}^N m_k (-y_k z_k) & \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{pmatrix}}_{=:\vec{\mathbb{I}}} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Llamando $\vec{\mathbb{I}}$ a la matriz marcada arriba, hemos probado la existencia de la matriz pedida en el enunciado.

Ahora, usando la notación $r_{k,x} = x_k; r_{k,y} = y_k; r_{k,z} = z_k$, podemos ver claramente que los términos de la diagonal de la matriz $\vec{\mathbb{I}}$ son:

$$I_{ii} = \sum_{k=1}^N m_k \left(\sum_{j \neq i} r_{k,j}^2 \right) = \sum_{k=1}^N m_k (r_k^2 - r_{k,i}^2) = \sum_{k=1}^N m_k (\delta_{ii} r_k^2 - r_{k,i} r_{k,i})$$

Por otra parte, los términos que no son de la diagonal pueden expresarse como:

$$I_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k (-r_{k,i} r_{k,j}) = \sum_{k=1}^N m_k (\delta_{ij} r_k^2 - r_{k,i} r_{k,j})$$

En consecuencia, pueden expresarse las componentes de la matriz $\vec{\mathbb{I}}$ tal y como viene descrito en el enunciado.

Por último, nótese que:

$$I_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k (\delta_{ij} r_k^2 - r_{k,i} r_{k,j}) = \sum_{i=1}^N m_k (\delta_{ji} r_k^2 - r_{k,j} r_{k,i}) = I_{ji} \quad \forall i, j = x, y, z$$

pues el producto es commutativo y la delta de Kronecker es simétrica. Por ende, la matriz $\vec{\mathbb{I}}$ es simétrica. $\mathbb{Q.E.D.}$

Definición 16. Sea un sólido rígido de N partículas. Llamaremos **endomorfismo de inercia** a la aplicación $\mathbf{I} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que su expresión coordenada en una base ortonormal $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ es la dada en la proposición 17 en la página 71.

Corolario 13. *Sea un sólido rígido macizo con volumen V y con función densidad $\rho : SR \rightarrow \mathbb{R}$, donde con SR denotamos el conjunto de puntos que conforman el sólido rígido. Los elementos de la matriz coordinada del endomorfismo de inercia en una base ortonormal $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ vienen dados por las expresiones:*

$$I_{ij} = \iiint_V \rho(r_x, r_y, r_z) [\delta_{ij} r^2 - r_i r_j] dV \quad \forall i, j = x, y, z$$

Demostración. Partimos de lo que queremos demostrar:

$$I_{ij} = \iiint_V \rho(r_x, r_y, r_z) [\delta_{ij} r^2 - r_i r_j] dV$$

Aplicando el teorema 1 en la página 3, tomando $n = 3$ y $f(\vec{r}) = \delta_{ij} r^2 - r_i r_j$, obtenemos que existen sucesiones $\{m_{N;k}\}_{k=1}^{(2N)^3}$ y $\{\vec{r}_{N;k}\}_{k=1}^{(2N)^3}$ tales que:

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{(2N)^3} m_{N;k} f(\vec{r}_{N;k}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{(2N)^3} m_{N;k} \left[\delta_{ij} r_{N;k}^2 - (\vec{r}_{N;k})_i (\vec{r}_{N;k})_j \right]$$

Y aplicando la proposición 17 en la página 71, obtenemos:

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} I_{ij}$$

$\mathbb{Q.E.D.}$

Corolario 14. *Sea un sólido rígido formado por N partículas. Su endomorfismo de inercia cumple las siguientes propiedades:*

1. *Todos sus autovalores son reales.*
2. *Existe una base tal que su matriz coordinada es diagonalizable.*
3. *Siempre existe una base vectorial de vectores propios que es ortonormal.*

Demostración. Por la proposición 17 en la página 71, sabemos que la matriz de inercia es simétrica. Por tanto, el endomorfismo de inercia es autoadjunto respecto al producto escalar canónico. Por Álgebra Lineal, sabemos que los valores propios de todo endomorfismo autoadjunto son siempre reales y, además, el endomorfismo es diagonalizable.

Por otra parte, sabemos que, en el caso de endomorfismos autoadjuntos, vectores propios que se corresponden a valores propios distintos son ortogonales entre sí. De esta forma, si el endomorfismo cuenta con 3

valores propios distintos, entonces cualquier base de vectores propios será ortogonal y, normalizando dichos vectores, ortonormal.

Si, por un contrario, la matriz sólo cuenta con 2 valores propios distintos entre sí, entonces habrá un espacio propio de dimensión 2 y otro de dimensión 1. Escogiendo una base ortogonal cualquiera del subespacio de dimensión 2 y concatenando a dicha base cualquier vector propio del espacio de dimensión 1, obtenemos una base ortogonal. Normalizando, conseguimos que sea ortonormal.

Por último, si la matriz únicamente cuenta con un autovalor distinto, entonces cualquier base ortonormal de \mathbb{R}^3 es una base de vectores propios (ortonorm). Q.E.D.

2.4.2. Forma cuadrática de inercia

Proposición 18. *Sea un sólido rígido de N partículas. Existe una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (un tensor $(0, 2)$) a través de la cual puede hallarse la energía cinética T de un sólido rígido en función de su velocidad angular $\vec{\omega}$. La matriz coordenada asociada a dicha forma cuadrática en una base ortogonal $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ es la mitad de matriz de inercia en dicha base. Es decir:*

$$T = Q(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{\mathbb{I}} \vec{\omega} = \frac{1}{2} (\omega_x \ \omega_y \ \omega_z) \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Demostración. Por el corolario 8 en la página 30, tenemos:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2$$

Por definición de sólido rígido (ver definición 13 en la página 50), las distancias relativas entre las partículas que forman el sólido rígido deben permanecer constantes. En consecuencia, las partículas del sólido rígido deben describir una circunferencia en torno a $\vec{\omega}$ (al menos, de forma instantánea). Por la proposición 13 en la página 57, tenemos que:

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = (\omega_y z_i - \omega_z y_i, \omega_z x_i - \omega_x z_i, \omega_x y_i - \omega_y x_i)$$

En consecuencia, es:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_i^2 &= (\omega_y z_i - \omega_z y_i)^2 + (\omega_z x_i - \omega_x z_i)^2 + (\omega_x y_i - \omega_y x_i)^2 = \\ &= \omega_y^2 z_i^2 + \omega_z^2 y_i^2 - 2\omega_y \omega_z y_i z_i + \omega_z^2 x_i^2 + \omega_x^2 z_i^2 - 2\omega_x \omega_z x_i z_i + \omega_x^2 y_i^2 + \omega_y^2 x_i^2 - 2\omega_x \omega_y x_i y_i = \\ &= \omega_x^2 (y_i^2 + z_i^2) + \omega_y^2 (x_i^2 + z_i^2) + \omega_z^2 (x_i^2 + y_i^2) - 2\omega_y \omega_z y_i z_i - 2\omega_x \omega_z x_i z_i - 2\omega_x \omega_y x_i y_i \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación dada por el corolario 8 en la página 30, obtenemos:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\omega_x^2 \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2)}_{=I_{xx}} + \underbrace{\omega_y^2 \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2)}_{=I_{yy}} + \underbrace{\omega_z^2 \sum_{i=1}^N (x_i^2 + y_i^2)}_{=I_{zz}} + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\omega_y \omega_z \sum_{i=1}^N -m_i y_i z_i}_{=I_{yz}} + \underbrace{\omega_z \omega_y \sum_{i=1}^N -m_i z_i y_i}_{=I_{zy}} + \underbrace{\omega_x \omega_z \sum_{i=1}^N -m_i x_i z_i}_{=I_{xz}} + \underbrace{\omega_z \omega_x \sum_{i=1}^N -m_i z_i x_i}_{=I_{zx}} + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\omega_x \omega_y \sum_{i=1}^N -m_i x_i y_i}_{=I_{xy}} + \underbrace{\omega_y \omega_x \sum_{i=1}^N -m_i y_i x_i}_{=I_{yx}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. +\omega_x\omega_y \underbrace{\sum_{i=1}^N -m_i x_i y_i}_{=I_{xy}} + \omega_y\omega_z \underbrace{\sum_{i=1}^N -m_i y_i x_i}_{=I_{yx}} \right] = \\
& = \frac{1}{2} [\omega_x I_{xx}\omega_x + \omega_y I_{yy}\omega_y + \omega_z I_{zz}\omega_z + \omega_y I_{yz}\omega_z + \omega_z I_{zy}\omega_y + \omega_x I_{xz}\omega_z + \omega_z I_{zx}\omega_x + \omega_x I_{xy}\omega_y + \omega_y I_{yx}\omega_x] = \\
& = \frac{1}{2} (\omega_x \ \omega_y \ \omega_z) \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{I} \vec{\omega}
\end{aligned}$$

Tomando Q como la forma cuadrática cuya matriz asociada en la base $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ sea $\frac{1}{2}\vec{I}$, probamos su existencia y su relación con \vec{I} . Q.E.D.

Definición 17. Sea un sólido rígido de N partículas. Llamaremos **forma cuadrática de inercia** a la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada en la proposición 18 en la página anterior.

2.4.3. ¿Qué demonios es el tensor de inercia?

Llegado este momento, es muy posible que el lector ande algo perdido con respecto a los conceptos de endomorfismo y forma cuadrática de inercia. Estos términos no se usan habitualmente en física, sino que en su lugar se suele decir «tensor de inercia». Ahora vamos a estudiar la razón.

Por una parte, hemos deducido en la proposición 17 en la página 71 que dada una base ortonormal, existe una matriz de inercia simétrica que permite relacionar el momento angular \vec{J} de un sólido rígido con su velocidad angular $\vec{\omega}$. Además, sabemos que dicha matriz es la representación coordenada de un endomorfismo que hemos llamado endomorfismo de inercia.

Por otra parte, hemos hallado en la proposición 18 en la página anterior que existe una forma cuadrática que relaciona la energía cinética T de un sólido rígido con su velocidad angular $\vec{\omega}$ y, además, hemos obtenido que la matriz coordenada de esta forma cuadrática era la misma matriz de inercia que para el caso del momento angular.

Ahora vamos a ver cómo es que esto es posible. Primero, examinemos por qué esto «chirría» al principio. Por conocimientos de álgebra lineal, sabemos que la matriz coordenada de un endomorfismo A cambia de base mediante: $C^{-1}AC$ donde C es una matriz invertible. Por otra parte, una forma cuadrática A (un tensor $(0, 2)$) cambia de base mediante C^TAC . En principio, la simultaneidad de estas dos formas de cambiar de base parece imposible.

La clave para solucionar esta aparente paradoja es darnos cuenta de que **siempre** estamos trabajando con **bases ortonormales**. Y, por conocimientos de álgebra lineal, sabemos que **las matrices del cambio entre bases ortonormales son siempre matrices ortogonales**; es decir, cumplen $C^T = C^{-1}$. En consecuencia, a efectos prácticos, es equivalente interpretar la matriz de inercia como un endomorfismo o como una forma cuadrática, pues siempre van a cambiar de base de la misma forma.

Todo esto motiva el hecho de que se le llame «tensor de inercia» al elemento matemático subyacente bajo la matriz de inercia, como es habitual en el caso de formas cuadráticas en física. Para entender apropiadamente las propiedades del tensor de inercia, es menester tener en cuenta su doble naturaleza: como tensor $(1, 1)$ (endomorfismo) y tensor $(0, 2)$ (forma cuadrática). Esta dualidad nos va a permitir aprovechar las ventajas de ambos tipos de entes matemáticos, especialmente las características del endomorfismo (las dadas en el corolario 14 en la página 73).

2.4.4. Ejes principales de inercia y propiedades

Definición 18. Sea un sólido rígido formado por N partículas. Diremos que un eje j es **un eje principal de inercia** si $I_{ij} = 0 \forall i \neq j$.

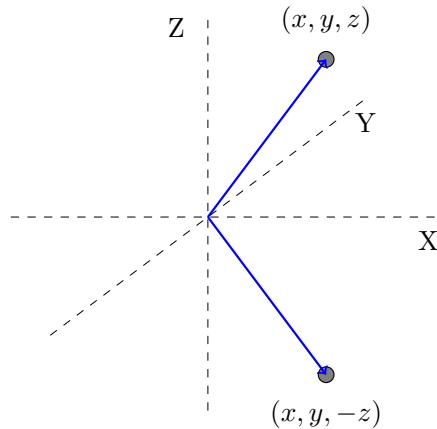
Corolario 15. *Sea un sólido rígido formado por N partículas. Los vectores propios de su endomorfismo de inercia son ejes principales de inercia.*

Demostración. Por el corolario 14 en la página 73, tenemos que el endomorfismo \mathbf{I} es diagonalizable. En la base de vectores propios, $\vec{\mathbf{I}}$ es diagonal, luego $I_{ij} = 0 \forall i \neq j$ y, por consiguiente, por la definición 18, los vectores propios de $\vec{\mathbf{I}}$ son ejes principales de inercia. Q.E.D.

Proposición 19. *Sea un sólido rígido macizo con volumen V y con función densidad $\rho : SR \rightarrow \mathbb{R}$, donde con SR denotamos el conjunto de puntos que conforman el sólido rígido. Si se da alguna de las siguientes propiedades:*

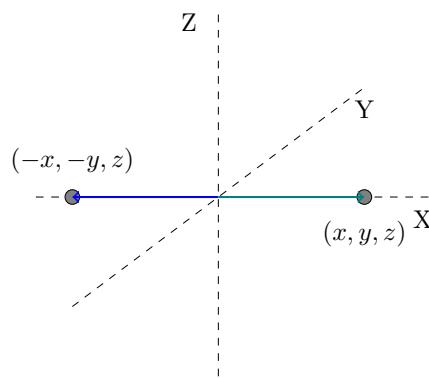
1. *El sólido rígido tiene simetría de reflexión en torno al plano XY:*

$$\rho(x, y, z) = \rho(x, y, -z) \quad \forall (x, y, z) \in SR$$



2. *El sólido rígido tiene simetría de rotación en torno al eje Z:*

$$\rho(x, y, z) = \rho(-x, -y, z) \quad \forall (x, y, z) \in SR$$



Entonces, el eje Z es eje principal de inercia del sólido rígido.

Demostración.

1. Por el corolario 13 en la página 73, tenemos que:

$$I_{xz} = \iiint_V \rho(x, y, z) [-xz] dV$$

Dividamos el volumen del sólido rígido en dos mitades, el conjunto de puntos del sólido rígido que cumplen $z \geq 0$ (llamaremos a dicho conjunto V_+) y el conjunto de puntos que cumplen $z < 0$ (llamaremos a dicho conjunto V_-). Así, podemos escindir la integral anterior en:

$$I_{xz} = \underbrace{\iiint_{V_+} \rho(x, y, z) [-xz] dx dy dz}_{=: I_+} + \underbrace{\iiint_{V_-} \rho(x, y, z) [-xz] dx dy dz}_{=: I_-} \quad (2.4.2)$$

Consideramos el cambio de variable:

$$\begin{aligned} \phi: \quad V_+ &\longrightarrow V_- \\ (u, v, w) &\longrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = -w \end{cases} \end{aligned}$$

Trivialmente, ϕ es biyectiva y de clase $C^{(\infty)}$ y, además:

$$\det J\phi = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow |\det J\phi| = 1$$

De esta forma, por el teorema de cambio de variable, tenemos:

$$\begin{aligned} I_- &= \iiint_{V_-} \rho(x, y, z) [-xz] dx dy dz = \iiint_{V_+} \rho(\phi(u, v, w)) uw du dv dw = \\ &= \iiint_{V_+} \rho(u, v, -w) uw du dv dw \end{aligned}$$

Reescribiendo $x = u$, $y = v$ y $z = w$, obtenemos:

$$I_- = \iiint_{V_+} \rho(x, y, -z) xz dx dy dz = \iiint_{V_+} \rho(x, y, -z) xz dV$$

Como, por hipótesis es $\rho(x, y, z) = \rho(x, y, -z) \forall (x, y, z) \in SR$, podemos escribir la expresión anterior como:

$$I_- = \iiint_{V_+} \rho(x, y, z) xz dV$$

Por último, sustituyendo en la ecuación 2.4.2, llegamos a:

$$\begin{aligned} I_{xz} &= \iiint_{V_+} \rho(x, y, z) [-xz] dV + \iiint_{V_+} \rho(x, y, z) xz dV = \\ &= \iiint_{V_+} \rho(x, y, z) [-xz + xz] dV = 0 \end{aligned}$$

Análogamente, se opera con I_{yz} y se llega a $I_{yz} = 0$. Por la definición 18 en la página anterior, Z es un eje principal de inercia, pues $I_{xz} = 0 = I_{yz}$.

2. Por el corolario 13 en la página 73, tenemos que:

$$I_{xz} = \iiint_V \rho(x, y, z) [-xz] dV = \iiint_V \rho(x, y, z) [-xz] dx dy dz$$

Vamos a trabajar en coordenadas cilíndricas, tomando: $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. En función de estas coordenadas la expresión anterior queda:

$$I_{xz} = \iiint_V \rho(r, \theta, z) [-rz \cos \theta] r dr d\theta dz$$

Por otra parte, notemos que la hipótesis $\rho(x, y, z) = \rho(-x, -y, z) \forall (x, y, z) \in SR$ adopta la siguiente forma en coordenadas cilíndricas:

$$\rho(r, \theta, z) = \rho(r, \theta + \pi, z) \forall (r, \theta, z) \in SR \quad (2.4.3)$$

Vamos a particionar nuestro volumen en dos conjuntos: $V_1 = \{(r, \theta, z) \in SR \text{ t.q. } \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$ y $V_2 = \{(r, \theta, z) \in SR \text{ t.q. } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]\}$. De esta forma, podemos expresar I_{xz} como sigue:

$$I_{xz} = \underbrace{\iiint_{V_1} \rho(r, \theta, z) [-rz \cos \theta] r dr d\theta dz}_{=:I_1} + \underbrace{\iiint_{V_2} \rho(r, \theta, z) [-rz \cos \theta] r dr d\theta dz}_{=:I_2} \quad (2.4.4)$$

Consideramos el cambio de variable:

$$\begin{aligned} \phi : \quad V_1 &\longrightarrow V_2 \\ (u, v, w) &\longrightarrow \begin{cases} r = u \\ \theta = v + \pi \\ z = w \end{cases} \end{aligned}$$

Trivialmente, ϕ es biyectiva y de clase $C^{(\infty)}$ y, además:

$$\det J\phi = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow |\det J\phi| = 1$$

De esta forma, por el teorema de cambio de variable, tenemos:

$$\begin{aligned} I_2 &= \iiint_{V_2} \rho(r, \theta, z) [-rz \cos \theta] r dr d\theta dz = \iiint_{V_1} \rho(\phi(u, v, w)) [-uw \cos(v - \pi)] u du dv dw = \\ &= \iiint_{V_1} \rho(u, v + \pi, w) [-uw \cos(v - \pi)] r du dv dw \end{aligned}$$

Reescribiendo $r = u$, $\theta = v$ y $z = w$, obtenemos:

$$I_2 = \iiint_{V_1} \rho(r, \theta + \pi, z) [-rz \cos(\theta - \pi)] r dr d\theta dz$$

Como $\cos(\theta - \pi) = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ y por la ecuación 2.4.3, tenemos:

$$I_2 = \iiint_{V_1} \rho(r, \theta, z) rz \cos \theta r dr d\theta dz$$

Por consiguiente, sustituyendo en la ecuación 2.4.4, llegamos a:

$$I_{xz} = \iiint_{V_1} \rho(r, \theta, z) [-rz \cos \theta] r dr d\theta dz + \iiint_{V_1} \rho(r, \theta, z) rz \cos \theta r dr d\theta dz =$$

$$= - \underbrace{\iiint_{V_1} \rho(r, \theta, z) r z \cos \theta r dr d\theta dz}_{=I_2} + \underbrace{\iiint_{V_1} \rho(r, \theta, z) r z \cos \theta r dr d\theta dz}_{=I_2} = -I_2 + I_2 = 0$$

Se opera análogamente con el momento I_{yz} , particionando el volumen en $V_1 = \{(r, \theta, z) \in SR \text{ t.q. } \theta \in [0, \pi)\}$ y $V_2 = \{(r, \theta, z) \in SR \text{ t.q. } \theta \in [\pi, 2\pi)\}$, pues ahora estamos trabajando con $\sin \theta$ en vez de $\cos \theta$. Utilizando $\sin(\theta - \pi) = -\sin(\pi - \theta) = -\sin \theta$ y siguiendo el mismo procedimiento que con I_{xz} , obtenemos que $I_{yz} = 0 = I_{xz}$. Por la definición 18 en la página 76, Z es un eje principal de inercia.

Q.E.D.

Observación 17. Nótese que el recíproco de la proposición 19 en la página 76 no es cierto.

Observación 18. Si tenemos un sólido rígido con 3 ejes de simetría (de rotación), por la proposición 19 en la página 76, podremos tomar dichos ejes como ejes principales de inercia. Así, obtendremos directamente una forma diagonal del tensor de inercia $\vec{\mathbb{I}}$.

Notación 3. Sea un sólido rígido de N partículas. Llamaremos $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ a la base ortonormal de vectores propios del tensor de inercia del sólido rígido. Recordemos por el corolario 14 en la página 73 que una base de dichas características siempre existe. En consecuencia, como la matriz de inercia es diagonal en la base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$, los elementos fuera de la diagonal serán nulos. Por consiguiente, por la definición 18 en la página 76, los vectores $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ llevan las direcciones de los ejes principales de inercia del sólido rígido.

Además, denotaremos con $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ a las coordenadas del vector $\vec{\omega}$ en la base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$. Es decir, será:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$$

Definición 19. Por último, llamaremos **momentos principales de inercia** I_1, I_2, I_3 a los valores propios del tensor de inercia.

Observación 19. Utilizando la definición 19, en la base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ el tensor de inercia adoptará la siguiente representación:

$$\vec{\mathbb{I}} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Proposición 20. *Sea un sólido rígido formado por N partículas. En la base de vectores propios de su tensor de inercia, la base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$, el momento angular del sólido rígido y su energía cinética pueden hallarse simplemente como:*

$$\begin{aligned} \vec{J} &= I_1 \omega_1 \hat{e}_1 + I_2 \omega_2 \hat{e}_2 + I_3 \omega_3 \hat{e}_3 \\ T &= \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \end{aligned}$$

donde I_1, I_2, I_3 son los momentos principales de inercia y $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ son las coordenadas del vector $\vec{\omega}$ en la base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$.

Demostración. Por la proposición 17 en la página 71, tenemos que:

$$\vec{J} = \vec{\mathbb{I}} \vec{\omega}$$

Además, por el corolario 14 en la página 73, sabemos que la matriz $\vec{\mathbb{I}}$ es diagonal en su base de vectores propios $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$. Por si fuera poco, los elementos de su diagonal serán sus autovalores que, por la definición 19, son los momentos principales de inercia. Así, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, por la proposición 18 en la página 74, tenemos que:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \tilde{\mathbb{I}} \vec{\omega}$$

Aquí es donde vamos a aplicar la dualidad el tensor de inercia explicada en la sección 2.4.3 en la página 75. A pesar de que la matriz $\tilde{\mathbb{I}}$ es, en realidad, una forma cuadrática en la fórmula anterior, podemos interpretar que cambia de base como un endomorfismo. En consecuencia, la matriz $\tilde{\mathbb{I}}$ cumplirá las mismas propiedades que la usada para el momento angular. Por consiguiente, tenemos:

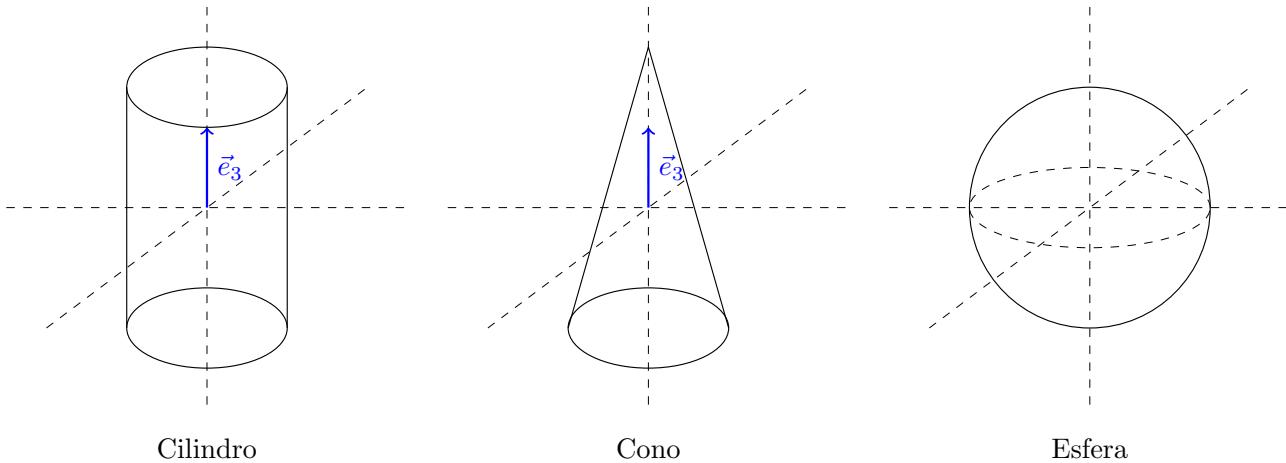
$$T = \frac{1}{2} (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3) \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

Q.E.D.

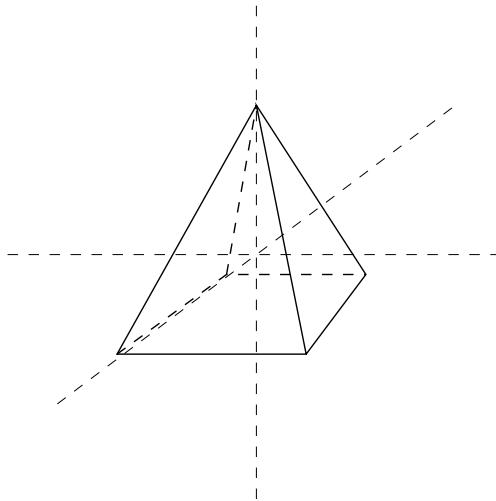
2.4.5. Cuerpos simétricos

Proposición 21. *Sea un sólido rígido macizo con volumen V y con función densidad $\rho : SR \rightarrow \mathbb{R}$, donde con SR denotamos el conjunto de puntos que conforman el sólido rígido.*

1. *Si el sólido rígido presenta simetría cilíndrica en torno al eje Z , es decir, $\rho(x, y, z) = \mathfrak{F}(x^2 + y^2, z)$ $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (la densidad depende únicamente de la distancia al eje Z y de la coordenada z), independientemente de los ejes X e Y escogidos (siempre que estén en el plano perpendicular al eje Z), estos son ejes principales de inercia y sus momentos principales de inercia correspondientes son iguales entre sí, o sea, $I_1 = I_2$.*



2. *Si el sólido rígido presenta simetría de rotación con más de dos giros, es decir, si existen dos ejes X e Y ortogonales entre sí tales que $\rho(x, y, z) = \rho(y, x, z) \ \forall (x, y, z) \in SR \wedge \rho(x, y, z) = \rho(-x, y, z) \ \forall (x, y, z) \in SR$, entonces los ejes X e Y son ejes principales de inercia y los momentos principales de inercia correspondientes a los ejes X e Y son iguales entre sí, o sea, $I_1 = I_2$.*



3. Si el sólido rígido presenta simetría esférica en torno a su centro, es decir, $\rho(x, y, z) = \mathfrak{F}(x^2 + y^2 + z^2)$ $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, entonces los momentos principales de inercia del sólido rígido son todos iguales entre sí: $I_1 = I_2 = I_3$. Además, cualesquiera tres ejes ortogonales que se corten en el centro del sólido rígido son ejes principales de inercia.

Demostración.

2. Recordemos las expresiones de cálculo del momento de inercia dadas por el corolario 13 en la página 73:

$$I_{xx} = \iiint_V \rho(x, y, z) (y^2 + z^2) dV$$

Estudiemos el cambio de variable:

$$\begin{aligned} \phi: \quad V &\longrightarrow V \\ (u, v, w) &\longrightarrow \begin{cases} x = v \\ y = u \\ z = w \end{cases} \end{aligned}$$

Claramente ϕ es biyectiva y de clase $C^{(\infty)}$. Además:

$$\det J\phi = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow |\det J\phi| = 1$$

De esta forma, por el teorema de cambio de variable, tenemos:

$$I_{xx} = \iiint_V \rho(y, x, z) (x^2 + z^2) dV$$

Como, por hipótesis, es $\rho(x, y, z) = \rho(y, x, z) \quad \forall (x, y, z) \in SR$, podemos escribir la expresión anterior como:

$$I_{xx} = \iiint_V \rho(x, y, z) (x^2 + z^2) dV = I_{yy}$$

y esto último es justo la definición de I_{yy} . Así $I_{xx} = I_{yy}$.

Por otra parte, llamemos:

$$V_+ := \{(x, y, z) \in SR \text{ t.q. } x > 0\}$$

$$V_- := \{(x, y, z) \in SR \text{ t.q. } x < 0\}$$

Ahora, por el corolario 13 en la página 73

$$\begin{aligned} I_{xy} = I_{ij} &= \iiint_V \rho(x, y, z) [-xy] dV = \\ &= \underbrace{\iiint_{V_+} \rho(x, y, z) [-xy] dV}_{=:I_+} + \underbrace{\iiint_{V_-} \rho(x, y, z) [-xy] dV}_{=:I_-} \end{aligned}$$

Y consideramos el cambio de variable:

$$\begin{aligned} \phi : \quad V_+ &\longrightarrow V_- \\ (u, v, w) &\longrightarrow \begin{cases} x = -u \\ y = v \\ z = w \end{cases} \end{aligned}$$

Trivialmente, ϕ es biyectiva y de clase $C^{(\infty)}$ y, además:

$$\det J\phi = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow |\det J\phi| = 1$$

De esta forma, por el teorema de cambio de variable, tenemos:

$$\begin{aligned} I_- &= \iiint_{V_-} \rho(x, y, z) [-xy] dx dy dz = \iiint_{V_+} \rho(\phi(u, v, w)) u w dudvdw = \\ &= \iiint_{V_+} \rho(-u, v, w) u w dudvdw \end{aligned}$$

Reescribiendo $x = u$, $y = v$ y $z = w$, obtenemos:

$$I_- = \iiint_{V_+} \rho(-x, y, z) x y dxdydz = \iiint_{V_+} \rho(-x, y, z) x y dV$$

Como, por hipótesis es $\rho(x, y, z) = \rho(-x, y, z) \forall (x, y, z) \in SR$, podemos escribir la expresión anterior como:

$$I_- = \iiint_{V_+} \rho(x, y, z) x y dV$$

Por último, sustituyendo en la ecuación 2.4.2 en la página 77, llegamos a:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \iiint_{V_+} \rho(x, y, z) [-xy] dV + \iiint_{V_+} \rho(x, y, z) x y dV = \\ &= \iiint_{V_+} \rho(x, y, z) [-xy + xy] dV = 0 \end{aligned}$$

En consecuencia es $I_{xy} = I_{yx} = 0$. A continuación, como es $\rho(x, y, z) = \rho(y, x, z) \forall (x, y, z) \in SR \wedge \rho(x, y, z) = \rho(-x, y, z) \forall (x, y, z) \in SR$, se da:

$$\rho(x, y, z) = \rho(-x, y, z) \forall (x, y, z) \in SR \wedge \rho(x, y, z) = \rho(x, -y, z) \forall (x, y, z) \in SR$$

Por consiguiente:

$$\rho(x, y, z) = \rho(-x, -y, z) \forall (x, y, z) \in SR$$

Por la proposición 19 en la página 76, el eje Z es un eje principal de inercia. Por tanto es: $I_{xz} = I_{zx} = I_{yz} = I_{zy} = 0$. Por ende, los ejes X e Y son ejes principales de inercia del sólido rígido.

1. Dado que es $\rho(x, y, z) = \mathfrak{F}(x^2 + y^2, z) \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tenemos garantizado que, al escoger dos ejes X e Y perpendiculares al eje Z y perpendiculares entre sí, va a darse:

$$\rho(x, y, z) = \rho(-x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in SR$$

y:

$$\rho(x, y, z) = \rho(y, x, z) \quad \forall (x, y, z) \in SR$$

pues ρ es únicamente función de $x^2 + y^2$ y de z y, claramente:

$$(-x)^2 + y^2 = x^2 + y^2$$

$$y^2 + x^2 = x^2 + y^2$$

Esta última afirmación no podría darse si no se cumpliera $\rho(x, y, z) = \mathfrak{F}(x^2 + y^2, z) \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ para todo punto de \mathbb{R}^3 . Así, tenemos garantizado que el dominio es simétrico a lo largo de los ejes X e Y . Por tanto, se cumplen las hipótesis del punto 2 y, por consiguiente, se cumple el enunciado.

3. Escojamos un eje Z arbitrario. Por hipótesis, sabemos que se da:

$$\rho(x, y, z) = \mathfrak{F}(x^2 + y^2 + z^2) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

En consecuencia, para cada $z = z_0$ fijo se da:

$$\rho(x, y, z_0) = \mathfrak{F}(x^2 + y^2) \quad \forall (x, y, z) \in SR \cap \{z = z_0\}$$

Por consiguiente, se dan las hipótesis del punto 1. En consecuencia: $I_{xx} = I_{yy}$ y $I_{xz} = I_{zx} = I_{yz} = I_{zy} = I_{xy} = I_{yx} = 0$. Repitiendo el argumento anterior, pero para un $x = x_0$ fijo o para un $y = y_0$ fijo, obtenemos que $I_{yy} = I_{zz}$ o $I_{xx} = I_{zz}$, respectivamente. Por tanto, es $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$. Como la elección de ejes se ha hecho de forma arbitraria, lo anterior es válido para cualquier triedro directo de ejes X, Y, Z .

Q.E.D.

Observación 20. Si se da alguna de las hipótesis de la proposición 21 en la página 80, podremos escribir la matriz de inercia como:

$$\vec{\mathbb{I}} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

y, en consecuencia, por la proposición 17 en la página 71:

$$\vec{J} = I_1(\omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2) + I_3 \omega_3 \hat{e}_3$$

Además, si $\omega_3 = 0$, entonces $\vec{J} = I_1 \vec{\omega} \Rightarrow \vec{J} \parallel \vec{\omega}$. En este caso, cualquier par de ejes en el plano (\hat{e}_1, \hat{e}_2) que sean perpendiculares entre sí, son ejes principales de inercia válidos.

En cualquiera de los casos anteriores, \hat{e}_3 está fijo (está determinado), pero \hat{e}_1 y \hat{e}_2 pueden no estar fijos ni en el tiempo ni el cuerpo.

Si $I_1 = I_2 = I_3$, entonces hay simetría esférica. En este caso es:

$$\vec{J} = I_1 \vec{\omega}$$

y podemos hacer una elección arbitraria de $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$.

Proposición 22. Una esfera, un tetraedro, un cubo, un octaedro, un dodecaedro y un icosaedro de densidad constante ρ_0 tienen todos matrices de inercia escalares para alguna base de ejes principales de inercia. Es decir, su matriz de inercia puede expresarse como:

$$\vec{\mathbb{I}} = I \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para alguna base de ejes principales de inercia del sólido rígido.

Demostración.

- La esfera: una esfera satisface la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, donde a^2 es una constante. Luego es:

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 + z^2 > a^2 \end{cases}$$

Luego, claramente, $\rho(x, y, z) = \delta!(x^2 + y^2 + z^2) \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Por la proposición 21 en la página 80, la matriz de inercia es escalar.

- El tetraedro: Vamos a tener que calcular toda la matriz de inercia del tetraedro y diagonalizarla posteriormente. Tomemos los ejes coordenados de la siguiente manera. Escogemos el eje X perpendicular a una arista de la base del tetraedro y el eje Z como la recta perpendicular al eje X que pasa por un vértice del tetraedro y el punto central de la cara del lado opuesto. Ahora, escogemos el eje Y tal que X, Y, Z sea un sistema de referencia ortogonal dextrógiro. Para facilitarnos las cuentas vamos a hacer uso del teorema de Stokes:

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV = \iint_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$$

Por la proposición 17 en la página 71, tenemos:

$$I_{xx} = \iiint_V \rho_0 (y^2 + z^2) dV = \rho_0 \iiint_V (y^2 + z^2) dV$$

Escogiendo:

$$\vec{f} = ([y^2 + z^2] x, 0, 0)$$

obtenemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = y^2 + z^2$$

Luego, por el teorema de la divergencia, tenemos:

$$\iiint_V (y^2 + z^2) dV = \iint_S ([y^2 + z^2] x, 0, 0) \cdot d\vec{S}$$

Tenemos que hallar los vectores normales a cada cara. Uno de ellos es inmediato: $(0, 0, 1)$, por cómo hemos definido el eje Z . Otro es $(\sin \theta, 0, \cos \theta)$. (Sin finalizar)

- El cubo: Seleccionamos como ejes X, Y y Z los ejes de simetría del cubo que pasan por su centro y por el punto medio de las caras. Así, en torno a cada eje se cumple que el sólido rígido presenta simetría de rotación con más de dos giros. Al aplicar la proposición 21 en la página 80 a todos los ejes, obtenemos que, necesariamente, los ejes X, Y y Z son ejes principales de inercia del sólido rígido y que $I_1 = I_2 = I_3$.
- El octaedro: Análogamente al caso del cubo, seleccionamos como ejes X, Y y Z tres ejes de simetría del octaedro que pasan por su centro y por uno de sus vértices de tal forma que sean perpendiculares entre sí. Así, en torno a cada eje se cumple que el sólido rígido presenta simetría de rotación con más de dos giros. Al aplicar la proposición 21 en la página 80 a todos los ejes, obtenemos que, necesariamente, los ejes X, Y y Z son ejes principales de inercia del sólido rígido y que $I_1 = I_2 = I_3$.

- El dodecaedro: disponible en próximas ediciones.
- El icosaedro: disponible en próximas ediciones.

Q.E.D.

Proposición 23. *Sea un sólido rígido macizo de espesor despreciable. Si tomamos el eje \hat{e}_3 paralelo a la dirección de su espesor, se da:*

$$I_1 + I_2 = I_3$$

siendo I_1, I_2, I_3 los momentos principales de inercia del sólido rígido.

Demostración. Para simplificarnos la notación vamos a tomar $\hat{x} = \hat{e}_1, \hat{y} = \hat{e}_2$ y $\hat{z} = \hat{e}_3$. Por la proposición 17 en la página 71, tenemos:

$$I_{xx} = \iiint_V \rho (y^2 + z^2) dV = \iiint_V \rho y^2 dV + \iiint_V \rho z^2 dV$$

Como el espesor de nuestro sólido rígido es despreciable, podemos considerar que la coordenada z de todos los puntos de nuestro sólido rígido no varía $z = z_0$. Descomponiendo $dV = dz dS$, obtenemos:

$$I_{xx} = \iiint_V \rho y^2 dV + \iint_S \underbrace{\left(\int_{z_0}^{z_0} \rho z^2 dz \right)}_{=0} dS = \iiint_V \rho y^2 dV$$

Análogamente:

$$I_{yy} = \iiint_V \rho x^2 dV$$

Por otra parte:

$$I_{zz} = \iiint_V \rho (x^2 + y^2) dV = \iiint_V \rho x^2 dV + \iiint_V \rho y^2 dV = I_{yy} + I_{xx}$$

Q.E.D.

Proposición 24. *Sea S un sólido rígido susceptible de descomponerse en dos sólidos rígidos S_1 y S_2 con matrices coordenadas del tensor de inercia $\vec{\mathbb{I}}_1$ y $\vec{\mathbb{I}}_2$, respectivamente. El momento de inercia de S viene dado por la suma de los momentos de inercia de S_1 y S_2 :*

$$\vec{\mathbb{I}} = \vec{\mathbb{I}}_1 + \vec{\mathbb{I}}_2$$

Demostración. El resultado se sigue fácilmente del hecho de que las expresiones dadas en la proposición 17 en la página 71 son lineales respecto al número de partículas.

Supongamos que el sólido rígido S_1 tiene N_1 partículas y que el sólido rígido S_2 tiene N_2 partículas; de forma que $N = N_1 + N_2$ es el número de partículas de S . Por la proposición 17 en la página 71, tenemos:

$$I_{1,ij} = \sum_{k=1}^{N_1} m_k (\delta_{ij} r_k^2 - r_{k,i} r_{k,j}) \quad \forall i, j = x, y, z$$

$$I_{2,ij} = \sum_{l=1}^{N_2} m_l (\delta_{ij} r_l^2 - r_{l,i} r_{l,j}) \quad \forall i, j = x, y, z$$

Tomando una variable n tal que $l = n - N_1$, podemos expresar el sumatorio anterior como:

$$I_{2,ij} = \sum_{n=N_1+1}^{N_1+N_2} m_n (\delta_{ij} r_n^2 - r_{n,i} r_{n,j}) \quad \forall i, j = x, y, z$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
 I_{ij} &= \sum_{n=1}^N m_k (\delta_{ij} r_n^2 - r_{n,i} r_{n,j}) = \underbrace{\sum_{n=1}^{N_1} m_k (\delta_{ij} r_n^2 - r_{n,i} r_{n,j})}_{=I_{1,ij}} + \underbrace{\sum_{n=N_1+1}^N m_k (\delta_{ij} r_n^2 - r_{n,i} r_{n,j})}_{=I_{2,ij}} = \\
 &= I_{1,ij} + I_{2,ij} \quad \forall i, j = x, y, z
 \end{aligned}$$

Q.E.D.

2.4.6. Teorema de Steiner

Teorema 6 (Teorema de Steiner). *Sea un sólido rígido de N partículas (con $N \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$) y masa M y sea $\vec{\mathbb{I}}^*$ la matriz coordenada del tensor de inercia respecto a su centro de masas para una base B . Tomemos nuestro origen de coordenadas en un punto P . Desde dicho punto P , la posición del centro de masas se expresa con coordenadas (X, Y, Z) . Ahora, sea $\vec{\mathbb{I}}$ la matriz coordenada del tensor de inercia respecto respecto al punto P para la misma base B . Ambas matrices están relacionadas por la expresión:*

$$\vec{\mathbb{I}} = M \begin{pmatrix} Y^2 + Z^2 & -XY & -XZ \\ -XY & X^2 + Z^2 & -YZ \\ -XZ & -YZ & X^2 + Y^2 \end{pmatrix} + \vec{\mathbb{I}}^*$$

Es decir, se cumple que el momento de inercia de un sólido rígido en torno a un punto P es la suma del momento de inercia del sólido respecto a su centro de masas y el momento de inercia que tendría una partícula puntual de masa M situada en el centro de masas.

Demostración. Recordemos que según la proposición 17 en la página 71 es:

$$I_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k (\delta_{ij} r_k^2 - r_{k,i} r_{k,j}) \quad \forall i, j = x, y, z \quad (2.4.5)$$

Ahora, notemos que podemos expresar un punto genérico \vec{r}_k como:

$$\vec{r}_k = \vec{R} + \vec{r}_k^*$$

donde $\vec{R} = (X, Y, Z)$; es decir, \vec{R} es el vector que une el punto P con el centro de masas del sólido rígido. Expresando lo anterior en coordenadas, obtenemos:

$$r_{k,i} = R_i + r_{k,i}^* \quad \forall i = x, y, z$$

Sustituyendo en la ecuación 2.4.5, llegamos a:

$$\begin{aligned}
 I_{ij} &= \sum_{k=1}^N m_k \left(\delta_{ij} \sum_{i=1}^3 (R_i + r_{k,i}^*)^2 - (R_i + r_{k,i}^*) (R_j + r_{k,j}^*) \right) = \\
 &= \sum_{k=1}^N m_k \left(\delta_{ij} \sum_{i=1}^3 [R_i^2 + r_{k,i}^{*2} + 2R_i r_{k,i}^*] - R_i R_j - R_i r_{k,j}^* - R_j r_{k,i}^* - r_{k,i}^* r_{k,j}^* \right) = \\
 &= \sum_{k=1}^N m_k \left(\delta_{ij} \sum_{i=1}^3 R_i^2 - R_i R_j \right) + \underbrace{\sum_{k=1}^N m_k \left(\delta_{ij} \sum_{i=1}^3 r_{k,i}^{*2} - r_{k,i}^* r_{k,j}^* \right)}_{=I_{ij}^*} + \delta_{ij} \sum_{k=1}^N m_k 2R_i r_{k,i}^* +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^N m_k R_i r_{k,j}^* - \sum_{k=1}^N m_k R_j r_{k,i}^* = \\
& = \left(\delta_{ij} \sum_{i=1}^3 R_i^2 - R_i R_j \right) \underbrace{\sum_{k=1}^N m_k + I_{ij}^*}_{=M} + \delta_{ij} 2 R_i \underbrace{\sum_{k=1}^N m_k r_{k,i}^*}_{=0} - R_i \underbrace{\sum_{k=1}^N m_k r_{k,j}^*}_{=0} - R_j \underbrace{\sum_{k=1}^N m_k r_{k,i}^*}_{=0} = \\
& = M \left(\delta_{ij} \sum_{i=1}^3 R_i^2 - R_i R_j \right) + I_{ij}^* \tag{2.4.6}
\end{aligned}$$

donde los términos marcados se anulan como consecuencia de la definición de centro de masas (ver definición 1 en la página 16):

$$\vec{0} = \vec{R}^* = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k^* \Leftrightarrow \sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k^* = M \vec{R}^* = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^N m_k r_{k,i}^* = 0 \quad \forall i = x, y, z$$

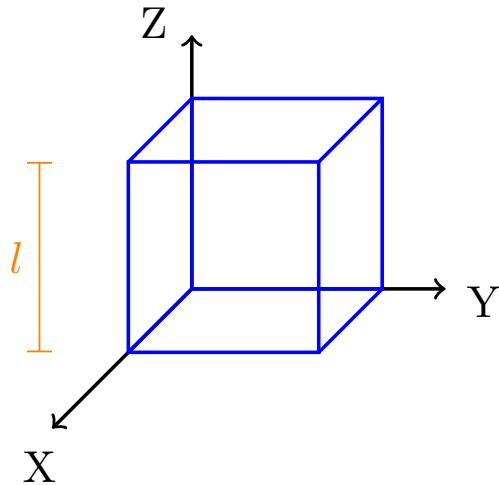
ya que es trivialmente $\vec{R}^* = \vec{0}$.

Desarrollando la ecuación 2.4.6, se llega al enunciado.

Q.E.D.

Observación 21. A la hora de resolver problemas, si el sólido rígido tiene un punto fijo lo usaremos como origen. Si no tiene un punto fijo, usaremos el centro de masas como origen.

Ejemplo 12. Calcular el momento de inercia \vec{I} de un cubo de lado l y densidad constante ρ en torno a uno de sus vértices.



Por la proposición 17 en la página 71, tenemos:

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \iiint_V \rho (x^2 + y^2) dV = \int_{x=0}^l \int_{y=0}^l \int_{z=0}^l \rho (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_{x=0}^l \int_{y=0}^l \rho l (x^2 + y^2) dx dy = \\
&= \rho l \int_{x=0}^l \left(x^2 [y]_0^l + \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^l \right) dx = \rho l \int_{x=0}^l \left(l x^2 + \frac{l^3}{3} \right) dx = \\
&= \rho l \left(\frac{l^3}{3} [x]_0^l + l \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l \right) = \rho l \left(\frac{l^4}{3} + \frac{l^4}{3} \right) = \frac{2\rho}{3} l^5 = \frac{2\rho}{3} l^2 \underbrace{l^3}_{=V} = \frac{2}{3} l^2 \underbrace{\rho V}_{=M} = \frac{2}{3} M l^2
\end{aligned}$$

Por simetría, obtenemos:

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3} Ml^2$$

Por otra parte, también por la proposición 17 en la página 71, es:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= - \iiint_V \rho xy dV = - \int_{x=0}^l \int_{y=0}^l \int_{z=0}^l \rho xy dx dy dz = -\rho l \int_{x=0}^l x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^l dx = -\rho l \frac{l^2}{2} \int_{x=0}^l x dx = \\ &= -\rho \frac{l^3}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l = -\rho \frac{l^5}{4} = -\rho \frac{l^2}{4} \underbrace{l^3}_{=V} = -\frac{l^2}{4} \underbrace{\rho V}_{=M} = -\frac{1}{4} Ml^2 \end{aligned}$$

Por simetría es:

$$I_{xy} = I_{yx} = I_{xz} = I_{zx} = I_{yz} = I_{zy} = -\frac{1}{4} Ml^2$$

Por ende:

$$\vec{\mathbb{I}} = \begin{pmatrix} \frac{2M}{3}l^2 & -\frac{M}{4}l^2 & -\frac{M}{4}l^2 \\ -\frac{M}{4}l^2 & \frac{2M}{3}l^2 & -\frac{M}{4}l^2 \\ -\frac{M}{4}l^2 & -\frac{M}{4}l^2 & \frac{2M}{3}l^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} Ml^2 \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Q.E.F.

Ejemplo 13. Calcular los elementos de la matriz de inercia para ejes que pasan por el centro de masas de un cubo de densidad ρ y lado l .

Por la proposición 22 en la página 84, sabemos que la matriz de inercia del cubo es escalar para unos ejes apropiados. En el caso del cubo, escogemos los ejes perpendiculares a cada una de las caras y que atraviesen su punto medio. Calculamos un único momento de inercia, por ejemplo el I_{xx} :

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \iiint_V \rho (y^2 + z^2) dV = \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{y=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{z=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho (y^2 + z^2) dx dy dz = \\ &= \rho [x]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{y=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (y^2 + z^2) dy dz = \rho l \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(y^2 [z]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} + \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \right) dy = \\ &= \rho l \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(y^2 l + \frac{1}{3} \left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8} \right) \right) dx = \rho l^2 \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(y^2 + \frac{1}{12} l^2 \right) dy = \\ &= \rho l^2 \left(\left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} + \frac{1}{12} l^2 [y]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \right) = \rho l^2 \left(\frac{1}{3} \left(\frac{l^3}{3} + \frac{l^3}{3} \right) + \frac{1}{12} l^3 \right) = \\ &= \rho l^5 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{6} \rho l^5 = \frac{1}{6} l^2 \rho \underbrace{l^3}_{=V} = \frac{1}{6} l^2 \underbrace{\rho V}_{=M} = \frac{1}{6} Ml^2 \end{aligned}$$

Por la mención hecha a la proposición 22 en la página 84, es:

$$\vec{\mathbb{I}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} Ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} Ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} Ml^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} Ml^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q.E.F.

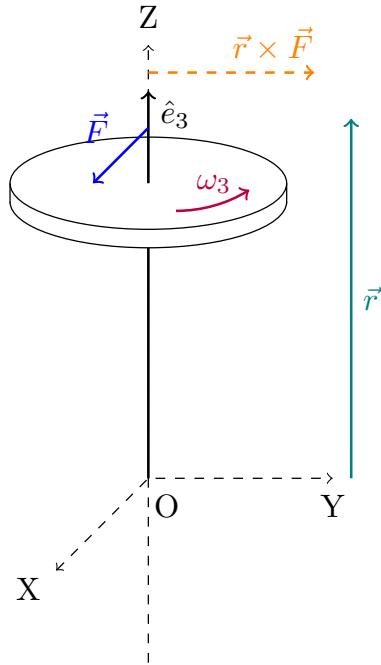
2.5. Movimiento de un punto fijo

Proposición 25. *Sea un sólido rígido con un punto fijo O y sean $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ sus ejes principales de inercia y I_1, I_2, I_3 sus momentos principales de inercia. Supongamos que el sólido rígido tiene una rotación inicial en torno al eje \hat{e}_3 con velocidad angular $\omega_3 \neq 0$. Si aplicamos una fuerza \vec{F} sobre el sólido rígido tal que $|\vec{r} \times \vec{F}| \ll I_3 \omega_3$ y tal que \hat{e}_3, \vec{r} y \vec{F} estén en el mismo plano, siendo \vec{r} el vector posición del punto de aplicación de la fuerza con respecto al punto fijo O ; entonces el sólido rígido girará en torno al eje \hat{e}_3 con velocidad angular ω_3 (igual que la inicial) y el eje \hat{e}_3 describirá un cono en torno a la dirección de aplicación de la fuerza con velocidad angular:*

$$\vec{\Omega} = -\frac{R}{I_3 \omega_3} \vec{F}$$

siendo $R = |\vec{r}|$ la distancia del punto fijo O al punto de aplicación de la fuerza.

Demostración. Inicialmente, nuestro sólido rígido está rotando en torno al eje \hat{e}_3 con velocidad angular ω_3 .



Por la proposición 20 en la página 79, inicialmente tenemos:

$$\vec{J}_0 = I_3 \omega_3 \hat{e}_3$$

Aplicando el teorema de Taylor-Young a primer orden, obtenemos que:

$$\vec{J}(t) = \vec{J}_0 + \frac{d\vec{J}}{dt}t \quad \text{cuando } t \rightarrow 0 \quad (2.5.1)$$

Por otra parte, por la proposición 12 en la página 51:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{N}_{ext} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.5.2)$$

Así, sustituyendo en la ecuación 2.5.1, obtenemos:

$$\vec{J}(t) = I_3 \omega_3 \hat{e}_3 + \vec{r} \times \vec{F}t$$

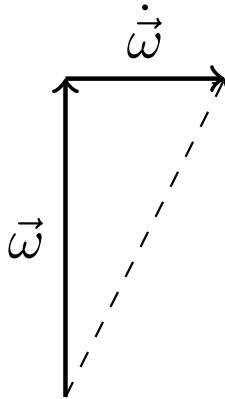
En consecuencia, como por hipótesis es $\vec{r} \times \vec{F} \ll I_3\omega_3$, podemos aproximar:

$$\vec{J}(t) \approx I_3\omega_3\hat{e}_3 = \vec{J}_0$$

Así, será:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} \approx \frac{d\vec{J}_0}{dt} = I_3 \frac{d\omega_3}{dt} \hat{e}_3 + I_3\omega_3 \frac{d\hat{e}_3}{dt} \quad (2.5.3)$$

pues I_3 es constante en el tiempo. Nótese que debe ser $\vec{r} \times \vec{F} \perp \vec{r}$ y $\vec{r} \times \vec{F} \perp \vec{F}$. Así, como \hat{e}_3 está en el mismo plano que \vec{r} y \vec{F} , necesariamente será $\vec{r} \times \vec{F} \perp \hat{e}_3$, luego es $\vec{J} \perp \frac{d\vec{J}}{dt}$ por la ecuación 2.5.2 en la página anterior.



En consecuencia, necesariamente, el primer sumando de la ecuación 2.5.3 debe ser nulo, lo que implica:

$$\frac{d\omega_3}{dt} = 0 \Leftrightarrow \omega_3 = \text{cte}$$

Así:

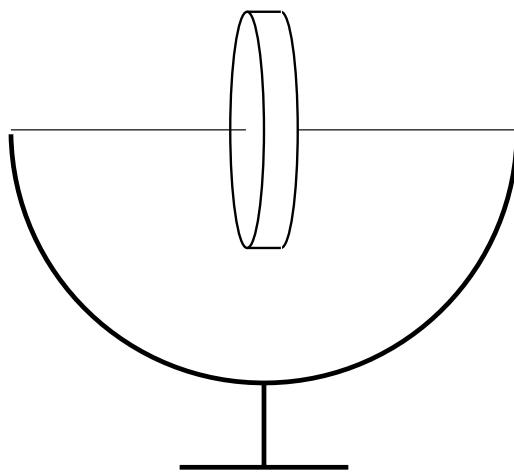
$$\begin{aligned} I_3\omega_3 \frac{d\hat{e}_3}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \Leftrightarrow \frac{d\hat{e}_3}{dt} &= \frac{1}{I_3\omega_3} \vec{r} \times \vec{F} = -\frac{1}{I_3\omega_3} \vec{F} \times \vec{r} = \\ &= -\frac{|\vec{r}|}{I_3\omega_3} \vec{F} \times \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -\frac{|\vec{r}|}{I_3\omega_3} \vec{F} \times \hat{r} = -\frac{R}{I_3\omega_3} \vec{F} \times \hat{r} \end{aligned}$$

ya que por hipótesis era $R = |\vec{r}|$. Por la proposición 13 en la página 57, como es $R = |\vec{r}| = \text{cte}$, pues el sólido rígido está anclado en el punto O , el extremo del vector \hat{e}_3 describe una trayectoria circular en torno a:

$$\vec{\Omega} := -\frac{R}{I_3\omega_3} \vec{F}$$

con velocidad angular $|\vec{\Omega}|$. En consecuencia, el vector \hat{e}_3 describe un cono en torno a $\vec{\Omega}$. Q.E.D.

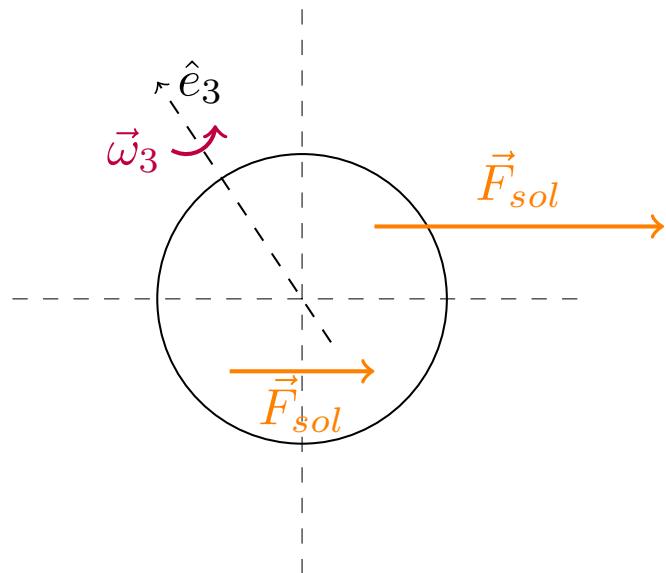
Observación 22. Al efecto descrito por la proposición 25 en la página anterior se lo conoce como efecto giroscópico. Veamos que es un giróscopo.



Se trata de un volante de inercia que puede rotar libremente. Esto se usaba en barcos y aviones para que el piloto tuviera una dirección de referencia. El funcionamiento era el siguiente: previamente al despegue del avión o al zarpado del barco se ponía a girar el giroscopio y, de esta manera, cuando los pilotos hacían sus maniobras, aunque la dirección del barco o del avión variaran, la dirección del eje principal de inercia \hat{e}_3 del giroscopio, apenas lo hacía. Así, podían tener una dirección de referencia.

La idea es que la dirección de un objeto es tanto más estable cuanto más rápido gira en torno al eje que marca dicha dirección (pues más pequeña es la velocidad angular $\vec{\Omega}$ que aparece en la proposición 25 en la página 89). Cuando se lanza un satélite al espacio, en la fase final, tiene que soltarse el satélite del resto del cohete. Esto tiene que hacerse de forma que el satélite salga en una dirección determinada. Para que esto sea más sencillo, normalmente se pone a girar el satélite antes de desengancharlo del resto del cohete de forma que cualquier posible variación en el desenganche altere lo menos posible la dirección del satélite.

El efecto giroscópico también se hace patente en los movimientos de la Tierra. Sabemos que la Tierra rota sobre sí misma y que además rota en torno al Sol. Pero, además, el eje de rotación de la Tierra no coincide con el plano de la eclíptica.

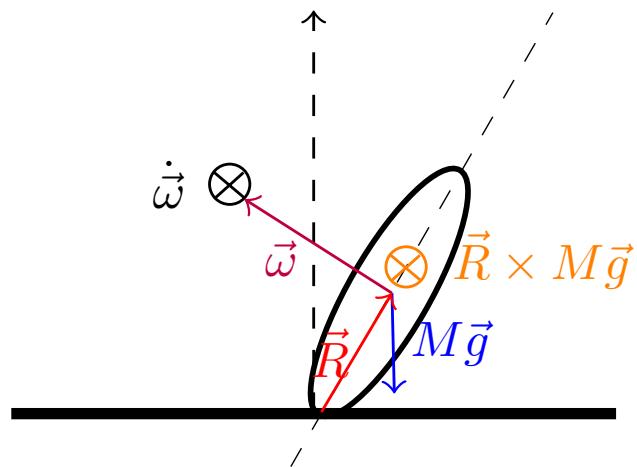


Como sabemos, la Tierra no es perfectamente esférica. En consecuencia, el campo gravitatorio generado por el Sol no es uniforme a lo largo de la superficie de la Tierra. Esto hace que el Sol genere un momento de

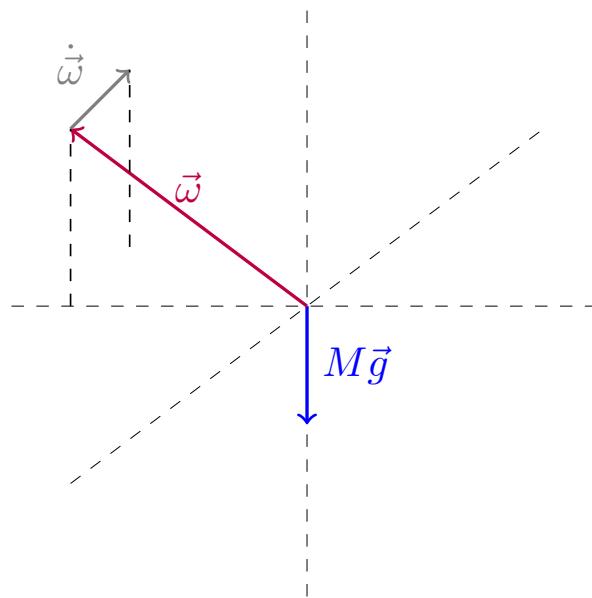
fuerzas sobre la Tierra que hace que su eje de giro preceda en torno a la perpendicular al plano de la eclíptica. El periodo de dicha precesión es de 25771 años.

Sin embargo, el efecto giroscópico no es el que proporciona la estabilidad en una bicicleta o en una moto, pues no es la rotación de las ruedas la que otorga la estabilidad a una bicicleta. La mecánica de una bicicleta depende fuertemente del hecho de que la rueda delantera puede girar. La idea es que la rueda delantera tiende a sobrevirar y eso hace que el centro de masas tienda a estar sobre la normal.

Ejemplo 14 (Precesión de un disco). Vamos a suponer que tenemos un disco tumbado girando con una velocidad muy elevada.



Este disco, inicialmente, está girando como está descrito en el dibujo. Tenemos una fuerza que actúa sobre el cuerpo, el peso. Nótese que $\vec{R} \times -Mg\hat{k}$ va «hacia dentro» del papel.



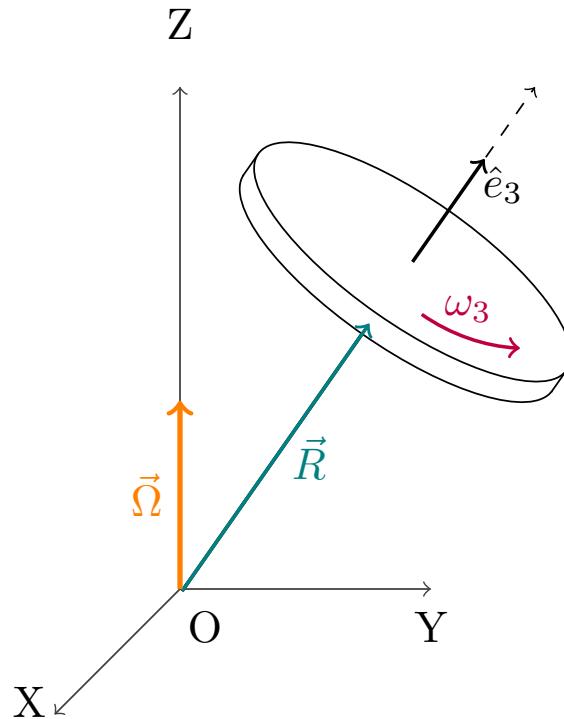
Por la proposición 25 en la página 89, sabemos que el vector $\hat{e}_3 \parallel \vec{\omega}$ describirá un cono en torno a:

$$\vec{\Omega} = -\frac{(-MgR)\hat{k}}{I_3\omega_3} = \frac{MgR}{I_3\omega_3}\hat{k}$$

Esto puede verse en el siguiente video ².

²<https://www.youtube.com/watch?v=DOU13fHjhMI>

Ejemplo 15 (Precesión de una peonza). En algunos libros «la peonza» recibe el nombre de «trompo simétrico». Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que nuestra peonza es un disco.



El eje de simetría de la peonza sigue siendo \hat{e}_3 y llamamos O al punto de pivotaje. Inicialmente tenemos el disco rotando en torno a \hat{e}_3 . El disco se ve sometido a una fuerza, el peso:

$$\vec{F} = -Mg\hat{k}$$

Si \vec{F} es pequeña o, alternativamente $MgR \ll I_3\omega_3$ (esta condición se da con fuerzas pequeñas, cuando I_3 es muy grande o cuando ω_3 es muy grande), podemos aplicar la proposición 25 en la página 89, obteniendo que el vector \hat{e}_3 está describiendo un cono en torno a \hat{k} , el centro de masas estará describiendo una trayectoria circular en torno a \hat{k} .

Esto puede verse en el siguiente video³.

2.6. Velocidad angular instantánea

Proposición 26. *Sea un sólido rígido de N partículas en rotación arbitraria. Existe una función $\vec{\omega}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:*

$$\dot{\vec{r}}_k(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_k(t) \quad \forall k = 1, \dots, N; \forall t \in \mathbb{R}$$

tomando como origen del sistema de referencia un punto cualquiera del sólido rígido.

Demostración. Escogemos como origen para nuestro sistema de referencia un punto cualquiera del sólido rígido. La posición de la partícula k -ésima que forma nuestro sólido rígido puede escribirse usando la base de ejes principales de inercia como sigue:

$$\vec{r}_k(t) = r_{k1}\hat{e}_1(t) + r_{k2}\hat{e}_2(t) + r_{k3}\hat{e}_3(t) \quad \forall k = 1, \dots, N \quad (2.6.1)$$

³<https://youtu.be/J6HDx4pNHqM>

donde r_{k1}, r_{k2}, r_{k3} serán constantes en el tiempo; pues el sistema de referencia utilizado rota con el cuerpo y, por definición de sólido rígido (ver definición 13 en la página 50), las distancias entre las partículas que forman el sólido deben permanecer constantes. Derivando, obtenemos:

$$\dot{\vec{r}}_k(t) = r_{k1}\dot{\hat{e}}_1(t) + r_{k2}\dot{\hat{e}}_2(t) + r_{k3}\dot{\hat{e}}_3(t) \quad \forall k = 1, \dots, N \quad (2.6.2)$$

donde recordamos que r_{k1}, r_{k2}, r_{k3} son constantes.

Bien, ahora definimos la función matricial $A(t) = (a_{ij})(t)$:

$$a_{ij}(t) := \hat{e}_i(t) \cdot \dot{\hat{e}}_j(t) \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \quad (2.6.3)$$

Veamos cuál es el valor de cada uno de los elementos de esta matriz A . Como nuestra base de ejes principales de inercia es ortogonal, tenemos que:

$$\hat{e}_i^2(t) = \hat{e}_i(t) \cdot \hat{e}_i(t) = 1 \quad \forall i = 1, 2, 3; \forall t \in \mathbb{R}$$

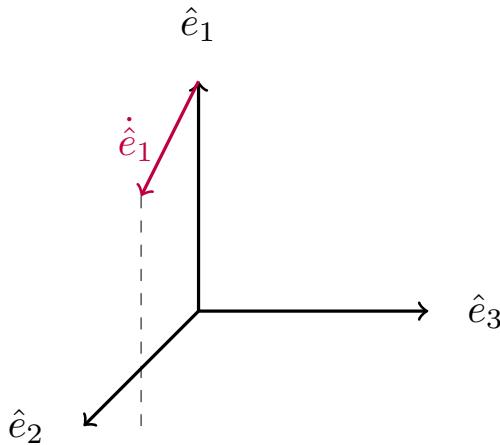
Derivando con respecto al tiempo, al aplicar la regla del producto, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}(\hat{e}_i^2)(t) = \dot{\hat{e}}_i(t) \cdot \hat{e}_i(t) + \hat{e}_i(t) \cdot \dot{\hat{e}}_i(t) \quad \forall i = 1, 2, 3; \forall t \in \mathbb{R}$$

Como el producto escalar es commutativo, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\hat{e}_i^2)(t) &= 2\hat{e}_i(t) \cdot \dot{\hat{e}}_i(t) = 2a_{ii}(t) = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3; \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \hat{e}_i(t) \cdot \dot{\hat{e}}_i(t) = a_{ii}(t) = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3; \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

donde hemos aplicado la definición de a_{ij} dada en la ecuación 2.6.3. Por la ecuación 2.6.4, debe ser, además, $\dot{\hat{e}}_i(t) \perp \hat{e}_i(t) \quad \forall i = 1, 2, 3, \forall t \in \mathbb{R}$. De esta forma, $\dot{\hat{e}}_1$ estará contenido en el plano formado por \hat{e}_2 y \hat{e}_3 , $\dot{\hat{e}}_2$ estará contenido en el plano formado por \hat{e}_1 y \hat{e}_3 y $\dot{\hat{e}}_3$ estará contenido en el plano formado por \hat{e}_1 y \hat{e}_2 .



Teniendo en cuenta lo anterior, como nuestra base de ejes principales de inercia es ortonormal, podemos descomponer el vector $\dot{\hat{e}}_1$ como:

$$\dot{\hat{e}}_1(t) = (\dot{\hat{e}}_1(t) \cdot \hat{e}_2(t))\hat{e}_2(t) + (\dot{\hat{e}}_1(t) \cdot \hat{e}_3(t))\hat{e}_3(t) = a_{21}(t)\hat{e}_2(t) + a_{31}(t)\hat{e}_3(t) \quad (2.6.5)$$

donde hemos usado la ecuación 2.6.3. Análogamente, podemos hallar las ecuaciones:

$$\dot{\hat{e}}_2(t) = a_{12}(t)\hat{e}_1(t) + a_{32}(t)\hat{e}_3(t) \quad (2.6.6)$$

$$\dot{\hat{e}}_3(t) = a_{13}(t)\hat{e}_1(t) + a_{23}(t)\hat{e}_2(t) \quad (2.6.7)$$

Por otra parte, como $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ forman una base ortonormal, es:

$$\hat{e}_i(t) \cdot \hat{e}_j(t) = 0 \quad \forall i \neq j; \forall t \in \mathbb{R}$$

Derivando, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j)(t) = 0 \Leftrightarrow \dot{\hat{e}}_i(t) \cdot \hat{e}_j(t) + \hat{e}_i(t) \cdot \dot{\hat{e}}_j(t) = a_{ji}(t) + a_{ij}(t) = 0 \Leftrightarrow a_{ji}(t) = -a_{ij}(t) \quad \forall i \neq j \quad \wedge \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

donde hemos usado la ecuación 2.6.3 en la página anterior. En consecuencia, la matriz A es antisimétrica, pues su diagonal ya sabemos que son únicamente ceros. Así, los a_{ij} dan las componentes del cambio de los vectores $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$.

A continuación, definimos:

$$\vec{\omega}(t) := (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)) := (a_{32}(t), a_{13}(t), a_{21}(t)) = -(a_{23}(t), a_{31}(t), a_{12}(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

De esta forma, podemos reescribir las ecuaciones 2.6.5 en la página anterior, 2.6.6 en la página anterior y 2.6.7 en función de omega como:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_1(t) &= \omega_3(t)\hat{e}_2(t) - \omega_2(t)\hat{e}_3(t) = \begin{vmatrix} \hat{e}_1(t) & \hat{e}_2(t) & \hat{e}_3(t) \\ \omega_1(t) & \omega_2(t) & \omega_3(t) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\omega}(t) \times \hat{e}_1(t) \\ \dot{\hat{e}}_2(t) &= -\omega_3(t)\hat{e}_1(t) + \omega_1(t)\hat{e}_3(t) = \begin{vmatrix} \hat{e}_1(t) & \hat{e}_2(t) & \hat{e}_3(t) \\ \omega_1(t) & \omega_2(t) & \omega_3(t) \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\omega}(t) \times \hat{e}_2(t) \\ \dot{\hat{e}}_3(t) &= \omega_2(t)\hat{e}_1(t) - \omega_1(t)\hat{e}_2(t) = \begin{vmatrix} \hat{e}_1(t) & \hat{e}_2(t) & \hat{e}_3(t) \\ \omega_1(t) & \omega_2(t) & \omega_3(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\omega}(t) \times \hat{e}_3(t) \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores nos permiten expresar la ecuación 2.6.2 en la página anterior como:

$$\dot{\vec{r}}_k(t) = r_{k1}\vec{\omega}(t) \times \hat{e}_1(t) + r_{k2}\vec{\omega}(t) \times \hat{e}_2(t) + r_{k3}\vec{\omega}(t) \times \hat{e}_3(t) \quad \forall k = 1, \dots, N$$

Como el producto vectorial es distributivo respecto a la suma, obtenemos:

$$\dot{\vec{r}}_k(t) = \vec{\omega}(t) \times \underbrace{[r_{k1}\hat{e}_1(t) + r_{k2}\hat{e}_2(t) + r_{k3}\hat{e}_3(t)]}_{=\vec{r}_k(t)} \quad \forall k = 1, \dots, N$$

y, por la ecuación 2.6.1 en la página 93, el término marcado es justo la posición de la partícula k -ésima. Por ende:

$$\dot{\vec{r}}_k(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_k(t) \quad \forall k = 1, \dots, N$$

Q.E.D.

Definición 20. A la función $\vec{\omega}(t)$ cuya existencia viene dada en la proposición 26 en la página 93 la llamaremos **velocidad angular instantánea**.

$$\vec{\omega} = \omega_1\hat{e}_1 + \omega_2\hat{e}_2 + \omega_3\hat{e}_3$$

Observación 23. La proposición 26 en la página 93 nos dice que siempre existe un eje de giro que estará fijo en un cierto instante de tiempo (un eje de giro instantáneo). Es decir, si yo miro el sólido rígido en un determinado instante τ , puedo considerar que el sólido rígido está girando en torno al vector $\vec{\omega}(\tau)$ en dicho instante de tiempo τ .

Además, la proposición 26 en la página 93 nos asegura que todo el desarrollo realizado en la sección 2.4 en la página 71 es válido para cualquier tipo de giro.

Observación 24. En la práctica, si no hay punto fijo en el sólido rígido, usaremos coordenadas con respecto al centro de masas. Es decir, siempre podemos encontrar $\vec{\omega}$ respecto al centro de masas.

Haremos uso de las siguientes ecuaciones del movimiento:

- Si hay pivote, tenemos:

$$\dot{\vec{J}} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

con $\vec{J} = I_1\omega_1\hat{e}_1 + I_2\omega_2\hat{e}_2 + I_3\omega_3\hat{e}_3$, donde tanto $\{\omega_i\}_{i=1}^3$ como $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$ cambian en el tiempo.

- Si no hay puntos fijos, trabajamos desde el sistema de referencia centro de masas:

$$\dot{\vec{J}}^* = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i^* \times \vec{F}_i$$

con $\vec{J}^* = I_1^*\omega_1\hat{e}_1^* + I_2^*\omega_2\hat{e}_2^* + I_3^*\omega_3\hat{e}_3^*$, donde $\{\hat{e}_1^*, \hat{e}_2^*, \hat{e}_3^*\}$ nos dan las direcciones de los ejes principales de inercia, pero anclados en el centro de masas.

2.7. Ecuaciones de Euler

Los ejes $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ forman un sistema de referencia en rotación con respecto a un observador externo inercial. En otras palabras, se trata de un sistema de referencia no inercial. En consecuencia, podemos aplicar todo lo que conocemos de sistemas de referencia no iniciales en rotación.

Notación 4. En particular vamos a distinguir:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} \neq \dot{\vec{J}}$$

donde usaremos la notación de Leibniz para el sistema de referencia inercial (el externo) y notación de Newton para el sistema de referencia no inercial $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$. Al término con la notación de Leibniz lo llamaremos ritmo de cambio absoluto, mientras que al término con la notación de Newton lo denominaremos ritmo de cambio relativo.

Teorema 7 (Ecuaciones de Euler). *Sea un sólido rígido con N partículas y sean I_1, I_2, I_3 sus momentos principales de inercia y $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ las respectivas direcciones de sus ejes principales de inercia. La velocidad angular instantánea $\vec{\omega}(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$ expresada en la base de vectores propios del tensor de inercia del sólido rígido, satisface las ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = N_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = N_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = N_3 \end{cases}$$

donde N_1, N_2, N_3 son las componentes del momento de fuerzas externo en la base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$.

Demostración. Vamos a trabajar con dos sistemas de referencia distintos, pero con origen común. El sistema del espacio será el sistema de referencia inercial, mientras que el sistema del cuerpo es un sistema de referencia no inercial en rotación con respecto al inercial. Además, sabemos que dicha rotación se produce en torno a la velocidad angular instantánea $\vec{\omega}(t)$. En consecuencia, será:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \dot{\vec{J}} + \vec{\omega} \times \vec{J} \quad (2.7.1)$$

por nuestros conocimientos de sistemas de referencia no inerciales.

Por otra parte, por la proposición 20 en la página 79 es:

$$\vec{J} = I_1\omega_1\hat{e}_1 + I_2\omega_2\hat{e}_2 + I_3\omega_3\hat{e}_3 \quad (2.7.2)$$

Y derivando con respecto al sistema de referencia no inercial (para él los ejes $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ no cambian en el tiempo), obtenemos:

$$\dot{\vec{J}} = I_1\dot{\omega}_1\hat{e}_1 + I_2\dot{\omega}_2\hat{e}_2 + I_3\dot{\omega}_3\hat{e}_3 \quad (2.7.3)$$

pues los momentos principales de inercia no cambian en el tiempo.

Además, por el teorema de conservación del momento angular (ver teorema 3 en la página 26), tenemos:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{N} \quad (2.7.4)$$

Juntando las ecuaciones 2.7.1, 2.7.3 y 2.7.4, obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= I_1\dot{\omega}_1\hat{e}_1 + I_2\dot{\omega}_2\hat{e}_2 + I_3\dot{\omega}_3\hat{e}_3 + \vec{\omega} \times \vec{J} = \\ &= I_1\dot{\omega}_1\hat{e}_1 + I_2\dot{\omega}_2\hat{e}_2 + I_3\dot{\omega}_3\hat{e}_3 + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Haciendo uso de la ecuación 2.7.2, llegamos a:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= I_1\dot{\omega}_1\hat{e}_1 + I_2\dot{\omega}_2\hat{e}_2 + I_3\dot{\omega}_3\hat{e}_3 + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ I_1\omega_1 & I_2\omega_2 & I_3\omega_3 \end{vmatrix} = \\ &= I_1\dot{\omega}_1\hat{e}_1 + I_2\dot{\omega}_2\hat{e}_2 + I_3\dot{\omega}_3\hat{e}_3 + (I_3\omega_2\omega_3 - I_2\omega_2\omega_3)\hat{e}_1 + \\ &\quad + (I_1\omega_1\omega_3 - I_3\omega_1\omega_3)\hat{e}_2 + (I_2\omega_1\omega_2 - I_1\omega_1\omega_2)\hat{e}_3 = \\ &= [I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3]\hat{e}_1 + [I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3]\hat{e}_2 + [I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2]\hat{e}_3 \end{aligned}$$

Expresando la ecuación anterior por componentes, llegamos al enunciado:

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = N_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = N_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = N_3 \end{cases}$$

Q.E.D.

Observación 25. La solución de las ecuaciones diferenciales dadas en el teorema 7 en la página anterior es $\vec{\omega}(t)$. Es decir, solucionándolas obtenemos el movimiento de rotación del sólido rígido en el tiempo. En general, son unas ecuaciones difíciles de resolver analíticamente. Además, N_1, N_2, N_3 son las componentes de \vec{N}_{ext} en la base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$, no en la base del espacio y, en general, la fuerza externa aplicada suele estar fija en el espacio. Como $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ varían, las componentes de \vec{N}_{ext} en la mencionada base también cambian en el tiempo, aun cuando sea $\vec{N}_{ext} = \text{cte}$. No obstante, las ecuaciones anteriores todavía resultan útiles si $\vec{N}_{ext} = \vec{0}$.

Definición 21. Diremos que un sólido rígido es **libre** cuando sobre él no actúe ninguna fuerza externa.

Corolario 16 (Sólido rígido libre). *Sea un sólido rígido libre con N partículas y sean I_1, I_2, I_3 sus momentos principales de inercia y $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ las respectivas direcciones de sus ejes principales de inercia. Si el sólido rígido está rotando inicialmente únicamente en torno al eje \hat{e}_3 con velocidad angular ω_3 , este movimiento de rotación permanece constante en el tiempo.*

Demostración. Como el sólido rígido es libre, por la definición 21, no hay fuerzas externas y, en consecuencia es $\vec{N} = \vec{0} \Rightarrow N_1, N_2, N_3 = 0$. Aplicando las ecuaciones de Euler (ver teorema 7 en la página 96), obtenemos:

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = 0 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = 0 \end{cases}$$

Además, en el instante $t = 0$ son $\omega_1, \omega_2 = 0$, por hipótesis, luego, obtenemos:

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1(0) = 0 \\ I_2\dot{\omega}_2(0) = 0 \\ I_3\dot{\omega}_3(0) = 0 \end{cases}$$

En consecuencia, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ permanecerán constantes en un intervalo de tiempo $(0, dt)$. Es decir, será $\omega_1(dt) = 0, \omega_2(dt) = 0, \omega_3(dt) = \omega_3(0) = \omega_3$ y, llegaríamos de nuevo a las mismas ecuaciones. Por tanto, debe ser $\dot{\omega}_1(t), \dot{\omega}_2(t), \dot{\omega}_3(t) = 0 \forall t \in (0, \infty)$. Así, es $\omega_1(t) = 0, \omega_2(t) = 0, \omega_3(t) = \omega_3 \forall t \in (0, \infty)$. Q.E.D.

Corolario 17 (Estabilidad de la rotación en torno a un eje principal de inercia). *Sea un sólido rígido libre con N partículas y sean I_1, I_2, I_3 sus momentos principales de inercia y $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ las respectivas direcciones de sus ejes principales de inercia. Supongamos que el sólido rígido está rotando inicialmente únicamente en torno al eje \hat{e}_3 con velocidad angular ω_3 . En un momento dado, se le comunica una pequeña perturbación de forma que aparecen unas componentes $\omega_1, \omega_2 \neq 0$ tales que $|\omega_1|, |\omega_2| \ll |\omega_3|$ y $\omega_1\omega_2 \approx 0$. La rotación en torno al eje \hat{e}_3 será estable si y sólo si $I_3 < I_1, I_2 \vee I_3 > I_1, I_2$.*

Demostración. Como el sólido rígido es libre, por la definición 21, sabemos que no actúan fuerzas externas; por consiguiente, es $N_1 = N_2 = N_3 = 0$. Aplicando las ecuaciones de Euler (ver teorema 7 en la página 96), llegamos a:

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = 0 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\underbrace{\omega_1\omega_2}_{\approx 0} = 0 \end{cases}$$

De la última ecuación, obtenemos:

$$I_3\dot{\omega}_3 \approx 0 \Leftrightarrow \dot{\omega}_3 \approx 0 \Leftrightarrow \omega_3 \approx \text{cte}$$

Con esto, las restantes dos ecuaciones se han convertido en un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = 0 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\omega}_1 = \overbrace{\frac{(I_2 - I_3)\omega_3}{I_1}}^{=: \alpha^2} \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = \overbrace{\frac{(I_3 - I_1)\omega_3}{I_2}}^{=: \beta^2} \omega_1 \end{cases}$$

Definiendo α y β como hemos definido antes, podemos expresar el sistema en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 \\ \beta^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

Para resolver el sistema anterior, tenemos que hallar los vectores propios generalizados de la matriz anterior. Para ello, hallemos primero los autovalores:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \alpha^2 \\ \beta^2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \alpha^2\beta^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = \alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow \lambda = \pm\alpha\beta$$

Como obtenemos dos autovalores diferentes con multiplicidad uno en el polinomio característico, la matriz es diagonalizable. Así, la solución general de nuestro sistema será de la forma:

$$\begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix} = Ae^{\alpha\beta t} + Be^{-\alpha\beta t}$$

con $A, B \in \mathbb{C}^2$. Para estudiar la estabilidad de la solución, únicamente tenemos que ver si el producto $\alpha\beta$ tiene parte real o no. Si tiene parte real, entonces la solución tendrá un término exponencial creciente que hará que ω_1 y ω_2 crezcan hasta que la hipótesis $|\omega_1|, |\omega_2| \ll |\omega_3|$ ya no sea cierta y la solución no será estable. En cambio, si $\alpha\beta$ es un número imaginario puro, únicamente habrá términos oscilantes que siempre están acotados en módulo y la solución será estable. Para ello, estudiemos:

$$\alpha^2\beta^2 = \frac{(I_2 - I_3)\omega_3}{I_1} \frac{(I_3 - I_1)\omega_3}{I_2} = \frac{(I_2 - I_3)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2} \omega_3^2$$

Si $\alpha^2\beta^2 < 0$, entonces $\alpha\beta$ será un número imaginario puro y, en caso contrario, si $\alpha^2\beta^2 > 0$, entonces $\alpha\beta \in \mathbb{R}$. En función de la relación entre I_1, I_2 e I_3 llegamos a las siguientes conclusiones:

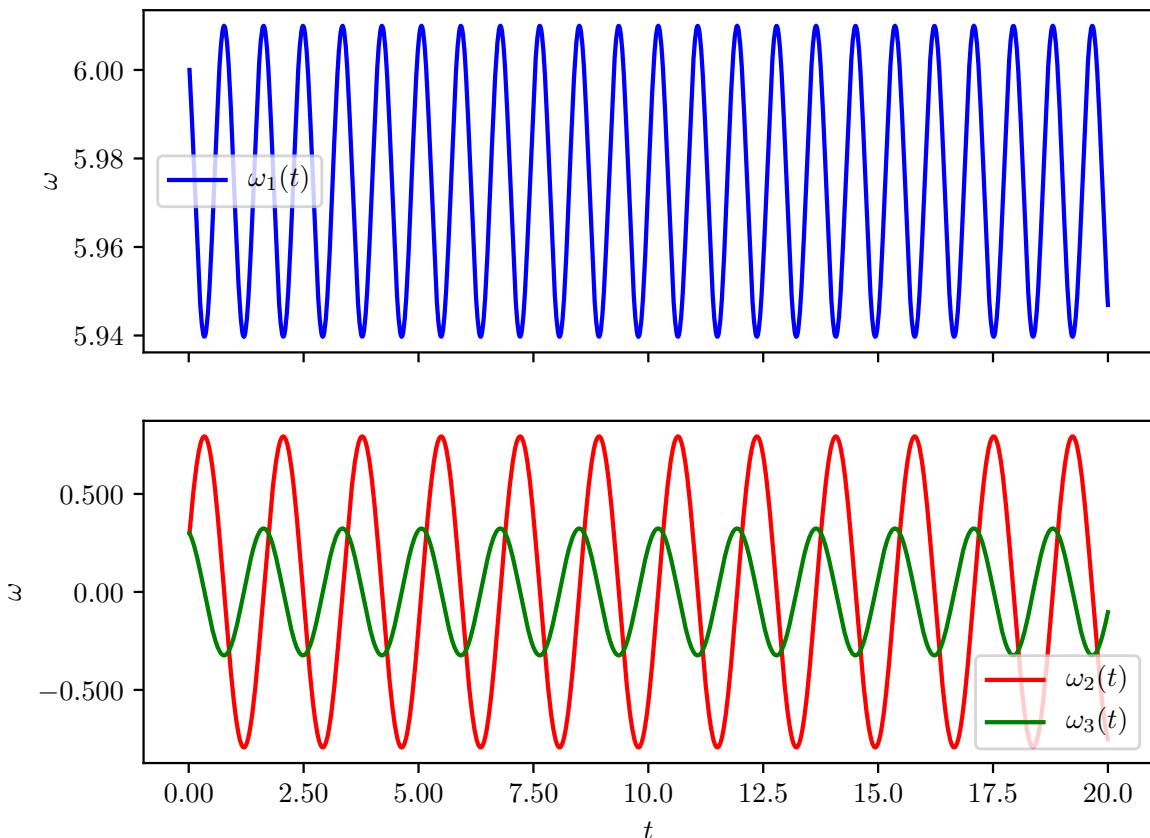
- Si $I_3 < I_1, I_2 \vee (I_3 > I_1, I_2)$, entonces $\alpha^2\beta^2 < 0$ y, por consiguiente, $\alpha\beta$ es imaginario puro. En este caso, $\omega_1(t), \omega_2(t)$ son oscilantes y la rotación se mantiene estable.
- Si $(I_1 < I_3 < I_2) \vee (I_1 > I_3 > I_2)$, en ese caso $\alpha^2\beta^2 > 0$ y $\alpha\beta \in \mathbb{R}$. Por lo comentado antes, la rotación no será estable.

Q.E.D.

Ejemplo 16 (Estabilidad de la rotación). Mediante una simulación numérica, vamos a tratar de comprobar lo expuesto en el corolario 17 en la página anterior. Para ello, partiremos de un sólido rígido de forma de paralelepípedo con momentos principales de inercia $I_1 = 2, I_2 = 4, I_3 = 8$. Llevaremos a cabo tres simulaciones; en cada una de ellas partiremos de una situación en la cual el sólido rígido está rotando en torno a uno de sus ejes principales de inercia \hat{e}_1, \hat{e}_2 o \hat{e}_3 con velocidad angular ω . Entonces, introduciremos una velocidad inicial $0,05\omega$ en los otros dos ejes, perturbando el sistema. Según el corolario 17 en la página anterior, cuando sea el eje I_1 o I_3 el que rota inicialmente, la perturbación no debería afectar casi a la rotación y ésta debería permanecer estable. Sin embargo, cuando el eje de rotación inicial sea I_2 , la perturbación debería desestabilizar el sólido rígido.

Veamos el resultado de las mencionadas simulaciones:

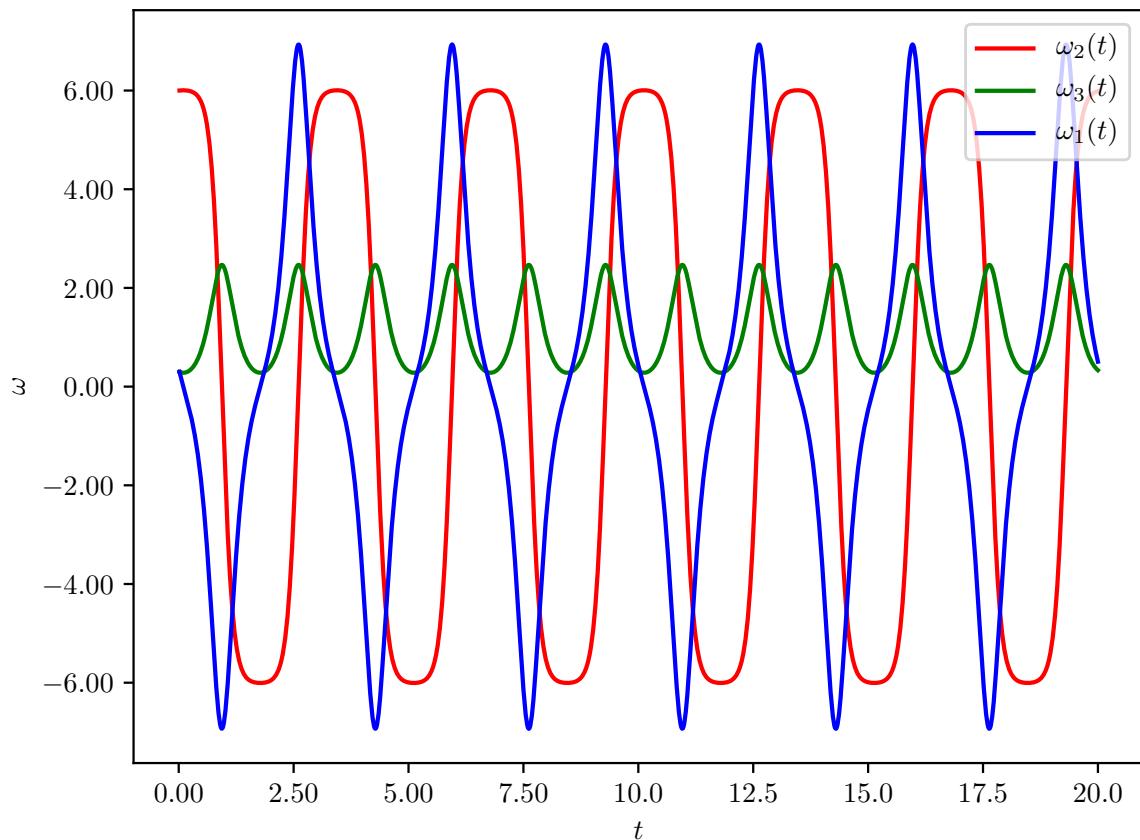
- Rotación inicial en torno a \hat{e}_1 :



El vídeo correspondiente puede verse aquí⁴. Como puede verse, la velocidad de giro ω_1 en torno a \hat{e}_1 apenas varía, mientras que las velocidades de giro ω_2, ω_3 en torno a \hat{e}_2 y \hat{e}_3 siguen soluciones armónicas tal y como se ha demostrado en el corolario 17 en la página 98.

- Rotación inicial en torno a \hat{e}_2 :

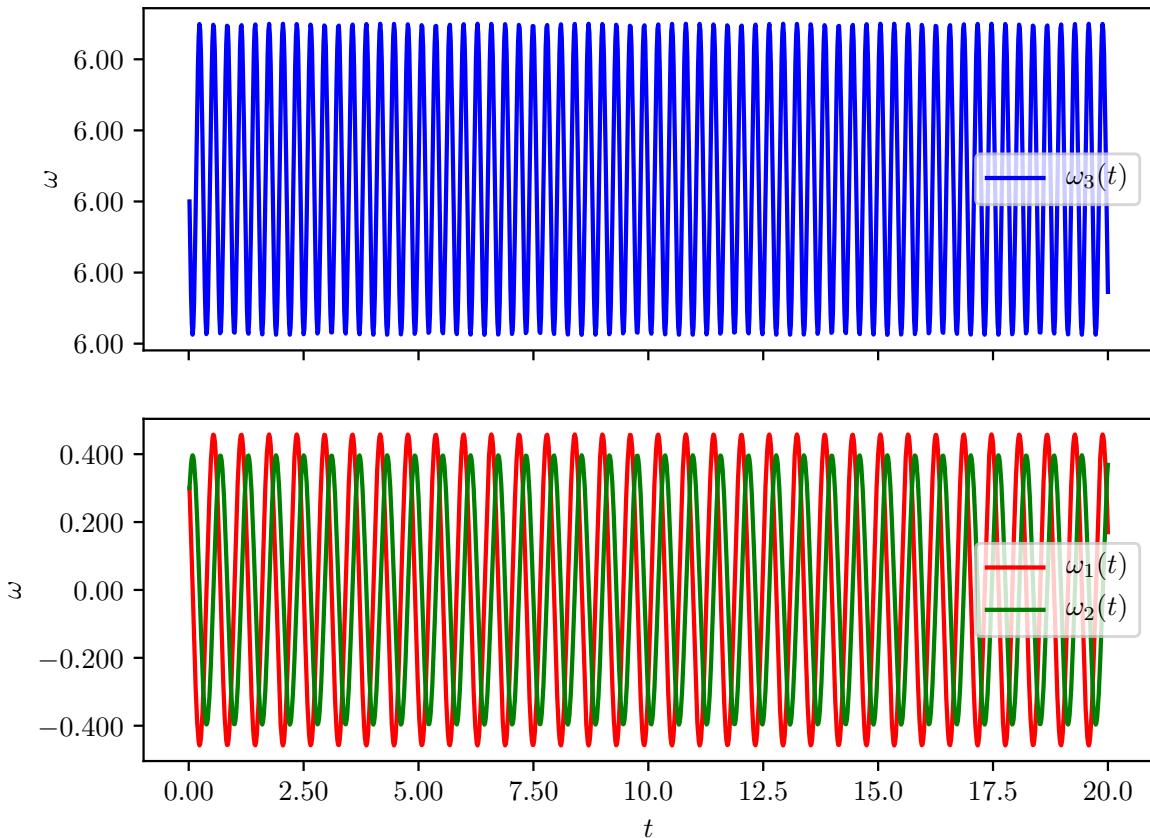
⁴<https://www.youtube.com/watch?v=tKJt3ZCHWic>



El vídeo correspondiente puede verse aquí⁵. Como puede verse sobre todo en el vídeo, la rotación es un completo caos. Además, fijándonos en la gráfica, vemos que las soluciones de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ no son armónicas.

- Rotación inicial en torno a \hat{e}_3 :

⁵https://www.youtube.com/watch?v=pL_LoUyznKs



El vídeo correspondiente puede verse aquí⁶. Como puede verse en la escala vertical de la gráfica, la velocidad ω_3 no varía prácticamente nada, mientras que las velocidades ω_1 y ω_2 siguen soluciones armónicas.

2.8. Ángulos de Euler

2.8.1. Definición y explicación

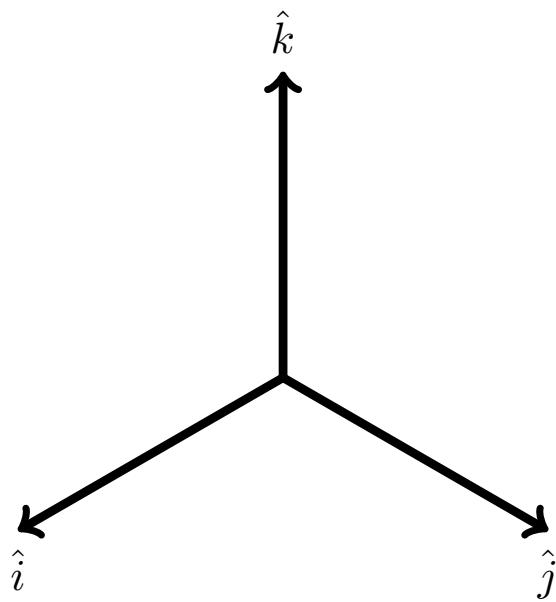
Sea un sólido rígido de N partículas con $N \in \mathbb{N} \vee N = \infty$. Partimos de un sistema de referencia fijo $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$. Dicho sistema recibirá el nombre de **sistema del espacio**. Por otra parte, tendremos el sistema de referencia no inercial $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$, que llamaremos **sistema del cuerpo**.

Si existe un punto fijo, tomaremos dicho punto como origen para ambos sistemas y si no existe punto fijo, tomaremos el centro de masas como origen para ambos sistemas.

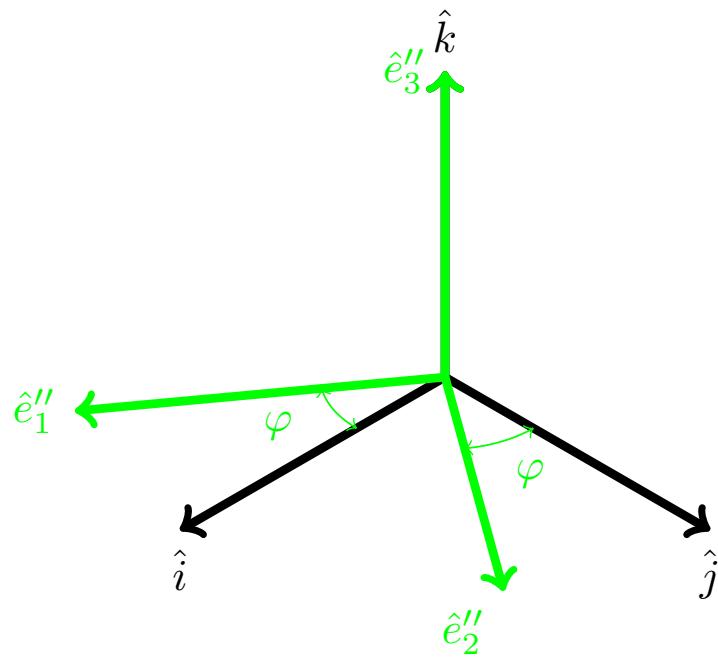
Los **ángulos de Euler** son tres coordenadas angulares (φ, θ, ψ) con las que se puede describir el estado de rotación de un sólido rígido. Veamos cómo podemos llegar a la posición de los ejes principales de inercia $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ a partir de los ángulos de Euler:

1. Partimos de los ejes $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$:

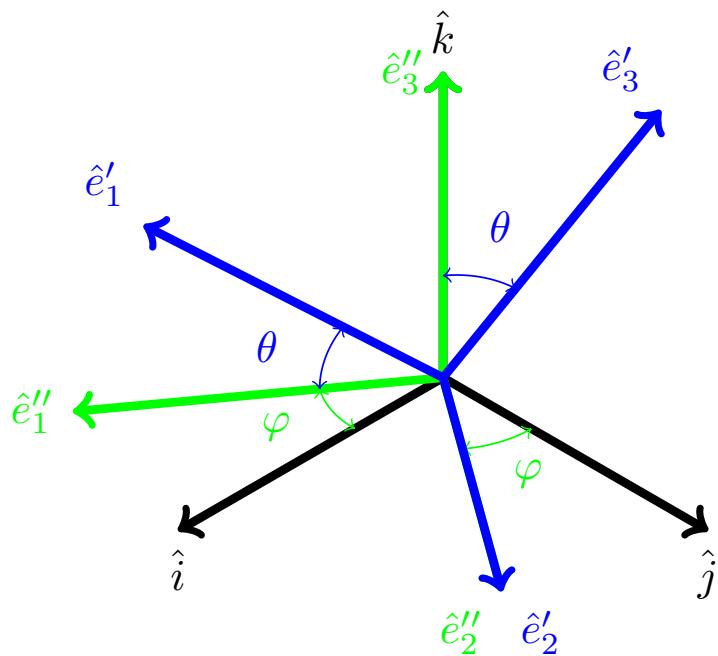
⁶<https://www.youtube.com/watch?v=d3WyXAvMZzE>



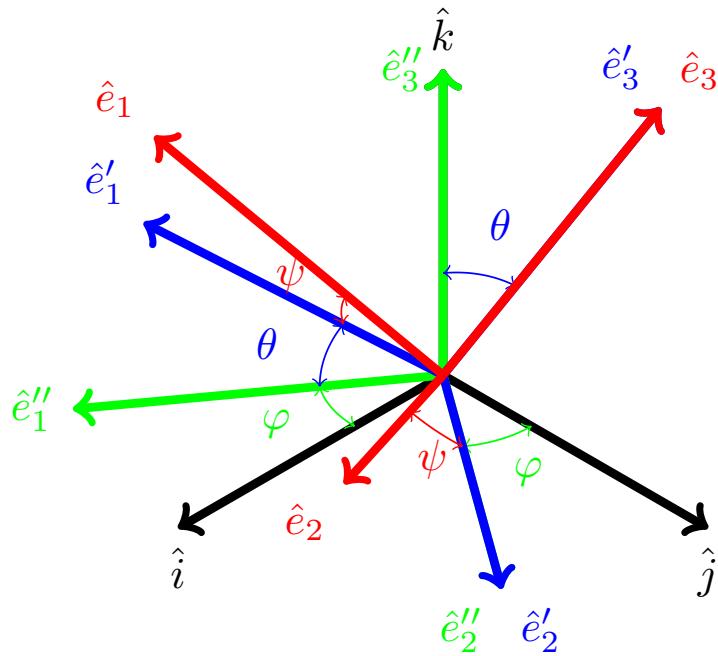
2. Ahora, hacemos rotar los ejes \hat{i} y \hat{j} alrededor del eje \hat{k} un ángulo φ . Llamaremos $\hat{e}_1'', \hat{e}_2'', \hat{e}_3'' \equiv \hat{k}$ a estos nuevos ejes:



3. A continuación, rotamos los ejes \hat{e}_1'' y \hat{e}_3'' en torno a \hat{e}_2'' un ángulo θ , obteniendo unos nuevos ejes $\hat{e}_1', \hat{e}_2' \equiv \hat{e}_2'', \hat{e}_3'$.



4. Por último, rotamos los ejes \hat{e}'_1 y \hat{e}'_2 en torno al eje \hat{e}'_3 , con lo que llegamos a los ejes $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3 \equiv \hat{e}'_3$, que ya son los ejes principales de inercia de nuestro sólido rígido.



Lo anterior puede verse más detallado en el siguiente vídeo⁷ donde se ha tomado $\varphi = -\frac{\pi}{5}, \theta = -\frac{\pi}{5}, \psi = -\frac{\pi}{6}$.

⁷<https://www.youtube.com/watch?v=x4S085j-Jk8>

2.8.2. Propiedades derivadas

Proposición 27. *Sea un sólido rígido de N partículas tal que $I_1 = I_2$. En función de las variaciones de sus ángulos de Euler $(\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ y de la base de ejes principales de inercia, la velocidad angular instantánea del sólido rígido queda:*

$$\vec{\omega} = -\dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_1 + \dot{\theta} \hat{e}_2 + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \hat{e}_3$$

Además, la dirección \hat{k} dada en las ilustraciones de la subsección 2.8.1 en la página 102 es susceptible de descomponerse como:

$$\hat{k} = -\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_3$$

Demostración. En el proceso explicado en la subsección 2.8.1 en la página 102, hemos rotado los ejes un ángulo φ en torno a \hat{k} , luego un ángulo θ en torno a \hat{e}_2'' y, por último, un ángulo ψ en torno a \hat{e}_3' . Por tanto, podemos descomponer la velocidad angular $\vec{\omega}$ precisamente como:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \hat{k} + \dot{\theta} \hat{e}_2'' + \dot{\psi} \hat{e}_3' = \dot{\varphi} \hat{k} + \dot{\theta} \hat{e}_2' + \dot{\psi} \hat{e}_3 \quad (2.8.1)$$

Como, por hipótesis, $I_1 = I_2$, cualquier par de ejes perpendiculares a \hat{e}_3 que sean perpendiculares entre sí, son ejes principales de inercia. Luego, en particular, podemos tomar la combinación de ejes $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\} := \{\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3\}$; de esta forma, únicamente falta descomponer la dirección \hat{k} . Notemos que es $\hat{k} \perp \hat{e}_2'$, como puede verse en la subsección 2.8.1 en la página 102. Por consiguiente, fijándonos en el tercer gráfico disponible en la subsección 2.8.1 en la página 102, sabiendo que el ángulo θ que aparece en el dibujo es negativo, obtenemos que:

$$\hat{k} = \sin |\theta| \hat{e}_1 + \cos |\theta| \hat{e}_3$$

Como, θ es negativo, $\sin(-x) = -\sin x$ y $\cos(-x) = \cos x$, obtenemos:

$$\hat{k} = -\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_3$$

Introduciendo el valor anterior de \hat{k} en la ecuación 2.8.1, obtenemos:

$$\vec{\omega} = -\dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_1 + \dot{\theta} \hat{e}_2 + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \hat{e}_3$$

Q.E.D.

Corolario 18. *Sea un sólido rígido de N partículas tal que $I_1 = I_2$. En función de las variaciones de sus ángulos de Euler $(\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ y de la base de ejes principales de inercia, podemos expresar su momento angular y su energía cinética como:*

$$\vec{J} = -I_1 \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_1 + I_2 \dot{\theta} \hat{e}_2 + I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \hat{e}_3$$

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2$$

Demostración. El resultado se sigue trivialmente de las proposiciones 27 y 20 en la página 79.

Q.E.D.

2.8.3. Movimiento libre de sólidos rígidos simétricos

Proposición 28. *Sea un sólido rígido **libre** de N partículas tal que $I_1 = I_2$ y sean φ, θ, ψ sus ángulos de Euler. Tomamos \hat{k} en la dirección del momento angular \vec{J} en $t = 0$. Los ángulos de Euler satisfacen las ecuaciones:*

$$\dot{\varphi} = \text{cte}, \quad \theta = \text{cte}, \quad \dot{\psi} = \text{cte}$$

Además, la velocidad angular instantánea viene dada por:

$$\vec{\omega} = -\dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_1 + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \hat{e}_3$$

y es constante en módulo. Es más, los vectores \vec{J} (que es constante), $\vec{\omega}$ y \hat{k} están siempre contenidos en el plano generado por los vectores \hat{e}_1 y \hat{e}_3 .

Por añadidura, tanto $\vec{\omega}$ como \hat{e}_3 preceden en torno a \hat{k} con ritmo $\dot{\varphi} = \text{cte}$ y la velocidad angular $\vec{\omega}$ precede en torno a \hat{e}_3 con ritmo $\dot{\psi} = \text{cte}$. Por último, $\theta = \text{cte}$ es el ángulo que forma el eje \hat{e}_3 con la dirección del momento angular \vec{J} .

Por último, se cumple la relación:

$$\dot{\varphi} = \frac{I_3 \omega_3}{I_1 \cos \theta}$$

Demostración. Como el sólido rígido es libre, por la definición 21 en la página 98, no hay fuerzas externas. En consecuencia, por el teorema 3 en la página 26, tenemos:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{J} = \text{cte}$$

Es decir, \vec{J} apunta siempre en la misma dirección, que hemos llamado \hat{k} . Entonces, por la proposición 27 en la página anterior, obtenemos:

$$\vec{J} = J \hat{k} = -J \sin \theta \hat{e}_1 + J \cos \theta \hat{e}_3 \quad (2.8.2)$$

donde $J = \text{cte}$.

Pero, por otra parte, por el corolario 18 en la página anterior, sabemos que:

$$\vec{J} = -I_1 \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_1 + I_2 \dot{\theta} \hat{e}_2 + I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \hat{e}_3 \quad (2.8.3)$$

Igualando componente a componente las ecuaciones 2.8.2 y 2.8.3, llegamos a:

$$-I_1 \dot{\varphi} \sin \theta = -J \sin \theta \Leftrightarrow J = I_1 \dot{\varphi}$$

$$I_2 \dot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \dot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \theta = \text{cte}$$

$$I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = J \cos \theta$$

Así, de la primera ecuación y tercera ecuación, como θ, J, I_1, I_2, I_3 son constantes, obtenemos que, necesariamente:

$$J = I_1 \dot{\varphi} = \text{cte} \Leftrightarrow \dot{\varphi} = \text{cte} \quad (2.8.4)$$

$$I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = J \cos \theta = \text{cte} \Leftrightarrow \dot{\psi} = \text{cte} \quad (2.8.5)$$

Así, obtenemos las ecuaciones:

$$\dot{\varphi} = \text{cte}, \quad \theta = \text{cte}, \quad \dot{\psi} = \text{cte} \quad (2.8.6)$$

Por otra parte, usando las ecuaciones 2.8.4 y 2.8.5, obtenemos:

$$\underbrace{I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})}_{=\omega_3} = J \cos \theta = I_1 \dot{\varphi} \cos \theta$$

donde el término marcado es ω_3 debido a la proposición 27 en la página anterior. Operando, concluimos:

$$\dot{\varphi} = \frac{I_3 \omega_3}{I_1 \cos \theta}$$

Utilizando la proposición 27 en la página 105, teniendo en cuenta los resultados hallados en la ecuación 2.8.6 en la página anterior, llegamos a:

$$\vec{\omega} = -\dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_1 + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \hat{e}_3$$

pues es $\dot{\theta} = 0$, como hemos visto antes. Como vemos, $\vec{\omega}$ está siempre contenida en el plano definido por \hat{e}_1 y \hat{e}_3 . A partir de la ecuación anterior y de la ecuación 2.8.2 en la página anterior, deducimos que tanto \vec{k} como $\vec{\omega}$ están siempre contenidos en el mismo plano: el definido por \hat{e}_1 y \hat{e}_3 . En consecuencia, por definición de \hat{k} , \hat{k} también estará en dicho plano.

Veamos el módulo de la velocidad angular instantánea. Como $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ es una base ortonormal, tenemos:

$$|\vec{\omega}| = \sqrt{\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \theta} = \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \theta} = \text{cte}$$

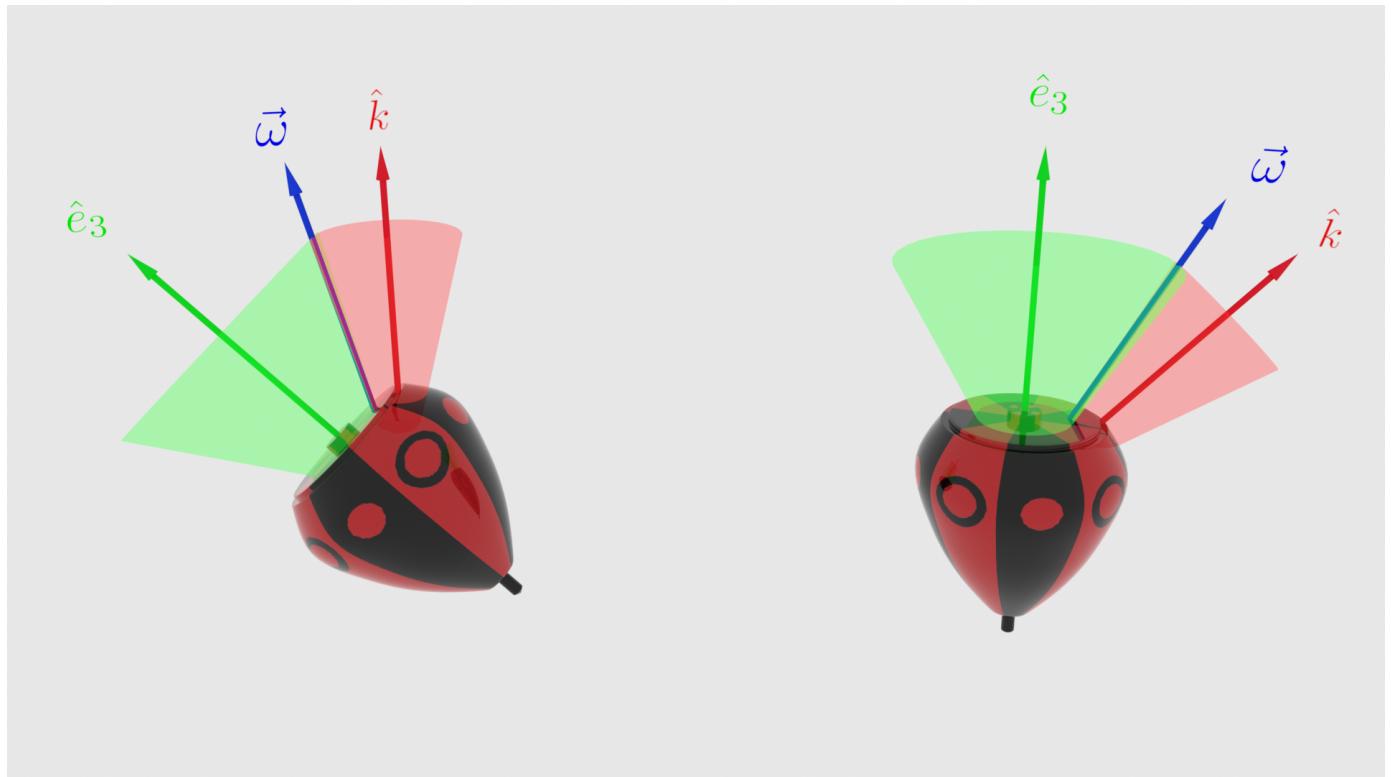
pues $\theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ son constantes.

Mirando el tercer dibujo de la subsección 2.8.1 en la página 102, podemos ver que el ángulo que forma $\hat{e}_3 \equiv \hat{e}'_3$ con el vector \hat{k} es justo θ , que es constante. También mirando ese dibujo, podemos deducir que, como φ es el ángulo de giro con respecto al eje \hat{k} , $\dot{\varphi}$ debe marcar la velocidad de rotación del sólido rígido en torno a \hat{k} . Como $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ giran con el cuerpo, $\dot{\varphi}$ debe ser la velocidad con la que los ejes \hat{e}_1 y \hat{e}_3 preceden en torno a \hat{k} . Como $\vec{\omega}$ es combinación lineal de \hat{e}_1 y \hat{e}_3 , $\vec{\omega}$ también precederá con ritmo $\dot{\varphi}$ en torno a \hat{k} . Por último, fijándonos en la última ilustración de subsección 2.8.1 en la página 102, vemos que $\dot{\psi}$ es el ángulo de giro en torno a \hat{e}_3 , luego $\dot{\psi}$ será la velocidad a la que precederá el eje \hat{e}_1 en torno a \hat{e}_3 . Como $\vec{\omega}$ es combinación lineal de \hat{e}_1 y \hat{e}_3 , $\vec{\omega}$ también precederá con ritmo $\dot{\psi}$ en torno a \hat{e}_3 . Q.E.D.

Definición 22. Sea un sólido rígido **libre** de N partículas tal que $I_1 = I_2$. Llamaremos **cono del espacio** al cono que describe el vector $\vec{\omega}$ en torno al eje \hat{k} según dado en la proposición 28 en la página 105.

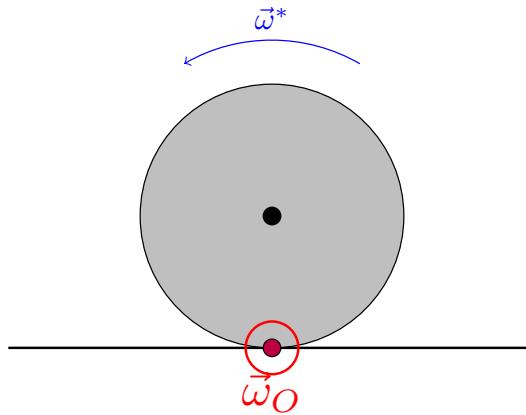
Análogamente, llamaremos **cono del cuerpo** al cono que describe el vector $\vec{\omega}$ en torno al eje \hat{e}_3 según dado en la mencionada proposición 28 en la página 105.

Observación 26. Observemos los conos del espacio y del cuerpo mencionados en la definición 22:



El cono rojo se corresponde con el cono del espacio, mientras que el cono verde se corresponde con el cono del cuerpo. Si consideramos \hat{k} fijo, entonces $\vec{\omega}$ describe el cono rojo entorno a \hat{k} . Sin embargo, si dejamos \hat{e}_3 fijo, el vector $\vec{\omega}$ describe el cono verde en torno a \hat{e}_3 . Puede verse esto en el siguiente video⁸ en el que se ha tomado $\dot{\phi} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \frac{\text{vueltas}}{\text{s}}$ y $\dot{\psi} = \frac{1}{8} \frac{\text{vueltas}}{\text{s}}$.

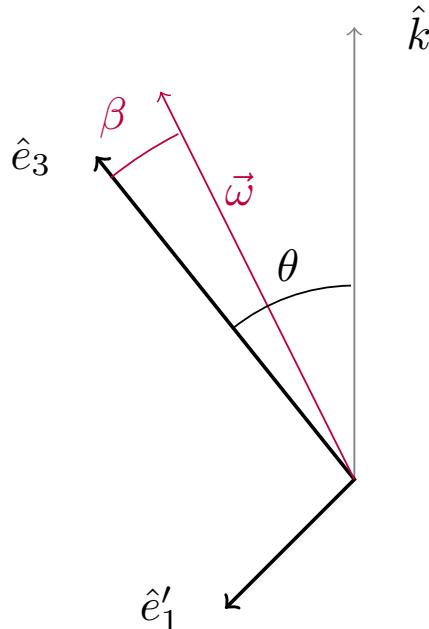
Estos dos movimientos mencionados han de ser posibles los dos a la vez. Recordemos que $\vec{\omega}$ nos da el eje de rotación en torno al cual gira el sólido rígido en un instante dado. En consecuencia, los puntos del eje $\vec{\omega}$ están fijos en dicho instante. Esto se asemeja a un movimiento de rodadura.



Por consiguiente, podemos interpretar esto como dos conos en movimiento de rodadura cuyo eje que toca «el suelo» está compartido entre ambos sistemas. Por ende, podemos hacernos una nueva visión de esta situación: es como si tuviéramos dos conos que ruedan sin deslizar el uno con el otro.

Proposición 29. *Sea un sólido rígido libre de N partículas tal que $I_1 = I_2$. El ángulo β que forma la velocidad angular instantánea $\vec{\omega}$ con el vector \hat{e}_3 del sólido rígido satisface la ecuación:*

$$\tan \beta = \frac{I_3}{I_1} \tan \theta = \frac{\dot{\phi} \sin \theta}{\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta}$$



⁸<https://www.youtube.com/watch?v=7ZV6rTEVRVo>

Demostración. Por la proposición 28 en la página 105, sabemos que será $\theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi} = \text{cte}$ y:

$$\vec{\omega} = -\dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_1 + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \hat{e}_3 = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_3 \hat{e}_3$$

Como podemos ver con el dibujo anterior, podemos relacionar β con las componentes de $\vec{\omega}$ en la base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$. Así, obtenemos que:

$$\tan \beta = \frac{-\omega_1}{\omega_3} = \frac{\dot{\varphi} \sin \theta}{\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta} \quad (2.8.7)$$

Por otra parte, por la proposición 20 en la página 79, tenemos:

$$\vec{J} = I_1 \omega_1 \hat{e}_1 + I_3 \omega_3 \hat{e}_3 \quad (2.8.8)$$

que es constante, pues el sólido rígido es libre. Además, por la proposición 27 en la página 105 es:

$$\vec{J} = J \hat{k} = -J \sin \theta \hat{e}_1 + J \cos \theta \hat{e}_3 \quad (2.8.9)$$

Juntando las ecuaciones 2.8.8 y 2.8.9 por componentes, llegamos a:

$$\begin{cases} -J \sin \theta = I_1 \omega_1 \\ J \cos \theta = I_3 \omega_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 = \frac{-J \sin \theta}{I_1} \\ \omega_3 = \frac{J \cos \theta}{I_3} \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación 2.8.7, obtenemos:

$$\tan \beta = \frac{-\omega_1}{\omega_3} = \frac{\frac{J \sin \theta}{I_1}}{\frac{J \cos \theta}{I_3}} = \frac{I_3 \sin \theta}{I_1 \cos \theta} = \frac{I_3}{I_1} \tan \theta$$

Q.E.D.

Corolario 19. *Sea un sólido rígido libre de N partículas tal que $I_1 = I_2 = I_3$. El ángulo β que forma la velocidad angular instantánea $\vec{\omega}$ con el vector \hat{e}_3 coincide con θ ($\beta = \theta$). Además, en este caso, $\vec{\omega} \parallel \vec{J}$.*

Demostración. Partimos de la proposición 29 en la página anterior:

$$\tan \beta = \frac{I_3}{I_1} \tan \theta$$

Como en nuestro caso es $I_3 = I_1$, obtenemos:

$$\tan \beta = \tan \theta$$

Como θ y β son ángulos entre ejes, será $\beta, \theta \in [0, \pi]$. En consecuencia, como la tangente es inyectiva en ese rango, tenemos $\beta = \theta$.

Por otra parte, recordemos que θ era el ángulo que formaban los ejes \hat{k} y \hat{e}_3 y que β era el ángulo que formaban los ejes \hat{e}_3 y $\vec{\omega}$. Como ambos son iguales y cumplen que el ángulo que forma el vector $\vec{\omega}$ con el eje \hat{k} es $\theta - \beta = 0$, tenemos que necesariamente $\vec{\omega}$ debe coincidir en dirección con \hat{k} . Y \hat{k} era tenido la dirección de \vec{J} ; luego es $\vec{\omega} \parallel \vec{J}$. Q.E.D.

Definición 23. Sea un sólido rígido de N partículas simétrico tal que $I_1 = I_2$, siendo I_1, I_2, I_3 sus momentos principales de inercia. Diremos que el sólido rígido es:

- **Oblato** si $I_3 > I_1$.

- Prolato si $I_3 < I_1$.

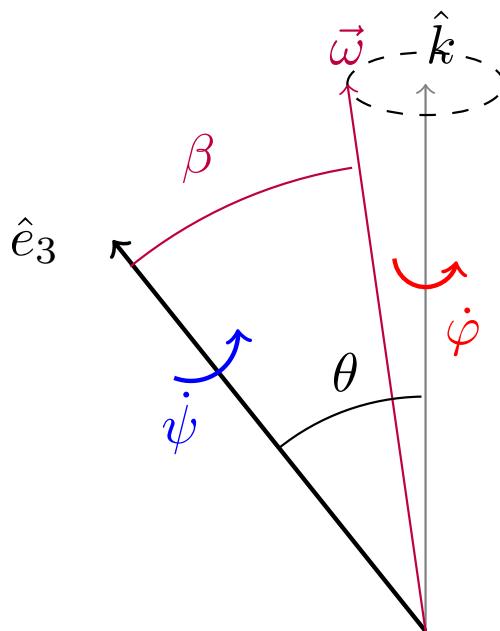
Corolario 20. *Sea un sólido rígido de N partículas. Considerando $\beta, \theta > 0$, en ausencia de fuerzas se cumple:*

- *Un sólido rígido es oblato si y sólo si $\beta > \theta$.*
- *Un sólido rígido es prolato si y sólo si $\beta < \theta$.*

Demostración. El resultado se obtiene trivialmente a partir de la definición 23 en la página anterior y de la proposición 29 en la página 108 al tener en cuenta que la tangente es creciente en $[0, \pi]$. Q.E.D.

Observación 27. Lo expuesto en el corolario 20 puede verse en los siguientes videos: oblato⁹ ($\dot{\varphi} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ vueltas/s y $\dot{\psi} = \frac{1}{8}$ vueltas/s) y prolato¹⁰ ($\dot{\varphi} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ vueltas/s y $\dot{\psi} = -\frac{1}{8}$ vueltas/s).

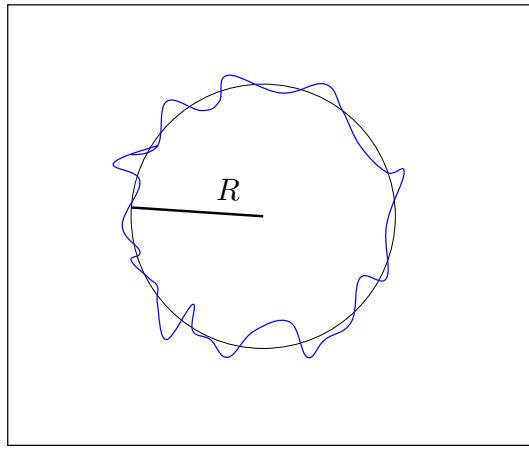
Observación 28. Veamos una aplicación de los conocimientos vistos hasta la fecha a la Tierra. Como la Tierra tiene un ligero ensanchamiento ecuatorial es $I_3 \lesssim I_1$. Por consiguiente, como no se da el caso del corolario 20, hay una pequeña precesión de $\vec{\omega}$ en torno a \hat{k} , al ser $\beta \lesssim \theta$.



Nótese que esto no tiene nada que ver con la fuerza gravitatoria. Se da simplemente por el hecho de que la Tierra gira en torno a sí misma. Esta precesión de $\vec{\omega}$ alrededor de \hat{k} tiene lugar en la naturaleza y recibe el nombre de «bamboleo de Chandler». Lo que se espera en teoría es que la velocidad angular instantánea describa una trayectoria circular en torno al eje perpendicular al plano de la eclíptica. El radio de esta precesión sería de unos 3 m. Sin embargo, como la Tierra no es simétrica, los momentos de inercia cambian constantemente en el tiempo. Por eso, la trayectoria observada no es circular, sino errática y el radio de dicha trayectoria reside entre 3 m y 15 m. Además, su periodo es de unos 400 días.

⁹https://drive.google.com/open?id=11zrrh1QrYW_00zepvGyzoTGeTwi_FtwJ

¹⁰https://drive.google.com/open?id=1GilUeJiMpkFL6o16zP_pU233AX1gkkoc



2.9. Mecánica lagrangiana

Proposición 30. *Sea un sólido rígido con N partículas tal que $I_1 = I_2$ que está sometido a un campo gravitatorio constante \vec{g} y que cuenta con un punto fijo O por el que pasa el eje \hat{e}_3 del sólido rígido. Llamemos R a la distancia entre el punto fijo O y el centro de masas del sólido rígido. Los ángulos de Euler φ, θ, ψ del sólido rígido deben cumplir las ecuaciones:*

$$\dot{\varphi} = \frac{J_z - J_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$$

$$I_2 \ddot{\theta} = I_1 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \dot{\varphi} \sin \theta + MgR \sin \theta$$

$$J_z = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta = \text{cte}$$

$$J_3 = I_3 \omega_3 = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = \text{cte}$$

Demostración. Por el corolario 18 en la página 105, sabemos que en la base de vectores propios del tensor de inercia de nuestro sólido rígido, podemos expresar el momento angular como:

$$\vec{J} = -I_1 \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_1 + I_2 \dot{\theta} \hat{e}_2 + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \hat{e}_3$$

Por otra parte, haciendo uso de la proposición 27 en la página 105, podemos hallar:

$$\begin{aligned} J_z &= \vec{J} \cdot \hat{k} = \left(-I_1 \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_1 + I_2 \dot{\theta} \hat{e}_2 + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \hat{e}_3 \right) \cdot (-\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_3) = \\ &= I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + \underbrace{I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)}_{=J_3} \cos \theta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow J_z = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + J_3 \cos \theta \Leftrightarrow \dot{\varphi} = \frac{J_z - J_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \end{aligned} \tag{2.9.1}$$

Ahora, escribamos el lagrangiano del sistema:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - MgR \cos \theta$$

Nótese que la energía potencial efectivamente es $V = MgR \cos \theta$, ya que θ es el ángulo que forma el eje \hat{e}_3 del sólido rígido con la vertical y la energía potencial será máxima cuando el centro de masas esté en la vertical, es decir, cuando $\theta = 0$.

Tenemos tres grados de libertad; en consecuencia, tendremos tres coordenadas generalizadas (los tres ángulos de Euler). Por ende, llegaremos a tres ecuaciones de Lagrange. Por el teorema 5 en la página 35, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (I_2 \dot{\theta}) &= I_1 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \dot{\varphi} \sin \theta + MgR \sin \theta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow I_2 \ddot{\theta} &= I_1 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \dot{\varphi} \sin \theta + MgR \sin \theta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} &\left[I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta \right] = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P_\varphi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + \underbrace{I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta}_{=I_3 \omega_3 = J_3} = \text{cte} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + J_3 \cos \theta &= \text{cte} \end{aligned}$$

donde recordamos que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$ recibe el nombre de momento generalizado en torno a φ . Utilizando la ecuación 2.9.1 en la página anterior, llegamos a que:

$$J_z = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + J_3 \cos \theta = \text{cte}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P_\psi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_3 \underbrace{(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)}_{=\omega_3} = \text{cte} \end{aligned}$$

De esta forma, vemos que:

$$J_3 = I_3 \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta = \text{cte}$$

Q.E.D.

Corolario 21. *Sea un sólido rígido con N partículas tal que $I_1 = I_2$ que está sometido a un campo gravitatorio constante \vec{g} y que cuenta con un punto fijo O por el que pasa el eje \hat{e}_3 del sólido rígido. Llamemos R a la distancia entre el punto fijo O y el centro de masas del sólido rígido. Si se cumple, además que $\theta = \text{cte}$ y $\omega_3 = (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = 0$, entonces $\dot{\varphi}$ cumple la ecuación de un péndulo físico:*

$$I_1 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + MgR \sin \theta = 0$$

Demostración. Por la proposición 30 en la página anterior es:

$$I_2 \ddot{\theta} = I_1 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_3 \underbrace{(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)}_{=\omega_3} \dot{\varphi} \sin \theta + MgR \sin \theta$$

Como en nuestro caso es $\theta = \text{cte}$, será $\ddot{\theta} = 0$. Además, como $\omega_3 = 0$, llegamos al enunciado.

Q.E.D.

Proposición 31. *Sea un sólido rígido con N partículas tal que $I_1 = I_2$ que está sometido a un campo gravitatorio constante \vec{g} y que cuenta con un punto fijo O por el que pasa el eje \hat{e}_3 del sólido rígido. Llamemos R a la distancia entre el punto fijo O y el centro de masas del sólido rígido. Supongamos, además, que $\theta = \text{cte}$ y que es:*

$$I_3 \omega_3 \gg \sqrt{4I_1 \cos \theta MgR}$$

Entonces llegamos a dos posibles soluciones aproximadas para $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} \approx \frac{MgR}{I_3\omega_3}, \quad \dot{\varphi} \approx \frac{I_3\omega_3}{I_1 \cos \theta}$$

que se corresponden con la precesión lenta de un sólido rígido sometido a fuerzas pequeñas (la primera solución, como vimos en la proposición 25 en la página 89) y con la precesión rápida de un sólido rígido libre (la segunda solución, como vimos en la proposición 28 en la página 105).

Demostración. Por la proposición 30 en la página 111, es:

$$\dot{\varphi} = \frac{J_z - J_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \quad (2.9.2)$$

$$J_z = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta = \text{cte}$$

$$I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = \text{cte}$$

Como es $\theta = \text{cte}$ y, por la proposición 30 en la página 111, es también $J_z = \text{cte}$ y $J_3 = \text{cte}$, a la vista de la ecuación 2.9.2, necesariamente, deberá ser $\dot{\varphi} = \text{cte}$. De esta forma, por la tercera ecuación será, también, $\dot{\psi} = \text{cte}$. Además, como es $\theta = \text{cte}$, será $\ddot{\theta} = 0$ y, en consecuencia, por la proposición 30 en la página 111, tenemos:

$$0 = I_1 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \dot{\varphi} \sin \theta + MgR \sin \theta$$

Definimos $\omega_3 := (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = \text{cte}$. Así, obtenemos:

$$0 = I_1 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 - I_3 \omega_3 \sin \theta \dot{\varphi} + MgR \sin \theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = I_1 \cos \theta \dot{\varphi}^2 - I_3 \omega_3 \dot{\varphi} + MgR$$

Despejemos $\dot{\varphi}$ de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{I_3 \omega_3 \pm \sqrt{I_3^2 \omega_3^2 - 4I_1 \cos \theta MgR}}{2I_1 \cos \theta} = \frac{I_3 \omega_3 \pm \sqrt{I_3^2 \omega_3^2 \left(1 - \frac{4I_1 \cos \theta MgR}{I_3^2 \omega_3^2}\right)}}{2I_1 \cos \theta} = \\ &= \frac{I_3 \omega_3 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4I_1 \cos \theta MgR}{I_3^2 \omega_3^2}}\right)}{2I_1 \cos \theta} \end{aligned}$$

Como, por hipótesis es $I_3 \omega_3 \gg \sqrt{4I_1 \cos \theta MgR}$, podemos suponer que:

$$\frac{4I_1 \cos \theta MgR}{I_3^2 \omega_3^2} \rightarrow 0$$

y estaremos en disposición de aplicar el desarrollo en serie de Taylor-Young a primer orden de $f(x) = \sqrt{1+x}$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x) \quad \text{cuando } x \rightarrow 0$$

Así, obtenemos:

$$\dot{\varphi} \approx \frac{I_3 \omega_3 \left(1 \pm \left[1 - \frac{2I_1 \cos \theta MgR}{I_3^2 \omega_3^2}\right]\right)}{2I_1 \cos \theta} =$$

$$= \begin{cases} \frac{I_3\omega_3 \left(2 - \frac{2I_1 \cos \theta MgR}{I_3^2 \omega_3^2} \right)}{2I_1 \cos \theta} = \frac{2I_3\omega_3 - \frac{2I_1 \cos \theta MgR}{I_3\omega_3}}{2I_1 \cos \theta} \\ \frac{I_3\omega_3 \frac{2I_1 \cos \theta MgR}{I_3^2 \omega_3^2}}{2I_1 \cos \theta} = \frac{MgR}{I_3\omega_3} \end{cases}$$

Recordemos que, por hipótesis, era:

$$\begin{aligned} I_3\omega_3 \gg \sqrt{4I_1 \cos \theta MgR} &\Leftrightarrow I_3^2\omega_3^2 \gg 4I_1 \cos \theta MgR \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow I_3\omega_3 \gg \frac{4I_1 \cos \theta MgR}{I_3\omega_3} &\Leftrightarrow 2I_3\omega_3 \gg \frac{2I_1 \cos \theta MgR}{I_3\omega_3} \end{aligned}$$

De esta forma, podemos aproximar algo más la primera de nuestras soluciones, obteniendo:

$$\dot{\varphi} \approx \frac{2I_3\omega_3}{2I_1 \cos \theta} = \frac{I_3\omega_3}{I_1 \cos \theta}$$

con lo que llegamos al enunciado. Q.E.D.

2.9.1. Nutación

Definición 24. Diremos que en el movimiento de un sólido rígido hay **nutación** cuando $\theta \neq \text{cte}$.

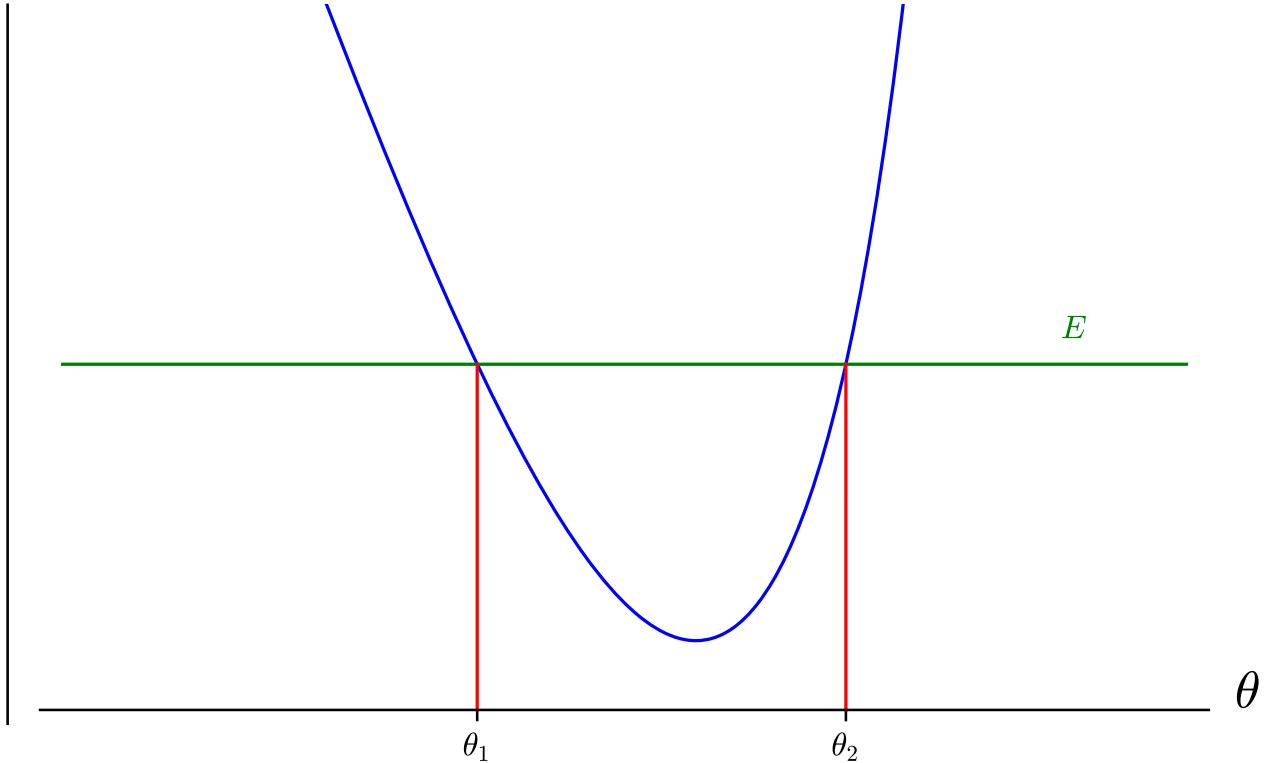
Proposición 32. *Sea un sólido rígido con N partículas tal que $I_1 = I_2$ que está sometido a un campo gravitatorio constante \vec{g} y que cuenta con un punto fijo O por el que pasa el eje \hat{e}_3 del sólido rígido. Llamemos R a la distancia entre el punto fijo O y el centro de masas del sólido rígido. Es posible expresar el movimiento del sólido rígido a través de una energía cinética T_{eff} que sólo depende de $\dot{\theta}$ y de una energía potencial efectiva V_{eff} que sólo depende de θ . Las expresiones para dichas energías son.*

$$T_{eff}(\theta) = \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2$$

$$V_{eff}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{(J_z - J_3 \cos \theta)^2}{I_1 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \frac{J_3^2}{I_3} + MgR \cos \theta$$

Además, existen $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$ tales que $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$$V_{eff}(\theta)$$



Demostración. Por el corolario 18 en la página 105, tenemos:

$$T = \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (2.9.3)$$

Por otra parte, por la proposición 30 en la página 111, es:

$$\dot{\varphi} = \frac{J_z - J_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$$

siendo $J_z, J_3 = \text{cte}$. Operando:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\varphi} \sin^2 \theta &= J_z - J_3 \cos \theta \Rightarrow I_1^2\dot{\varphi}^2 \sin^4 \theta = (J_z - J_3 \cos \theta)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow I_1\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta = \frac{(J_z - J_3 \cos \theta)^2}{I_1 \sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (2.9.4)$$

Además, también por la proposición 30 en la página 111 es:

$$J_3 = I_3\omega_3 = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = \text{cte} \Leftrightarrow \omega_3 = \frac{J_3}{I_3} \Rightarrow \omega_3^2 = \frac{J_3^2}{I_3^2} \Rightarrow I_3\omega_3^2 = \frac{J_3^2}{I_3} \quad (2.9.5)$$

De esta forma, mediante las ecuaciones 2.9.5 y 2.9.4, podemos escribir 2.9.3 como una función que únicamente depende de θ :

$$T = \frac{1}{2} \frac{(J_z - J_3 \cos \theta)^2}{I_1 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{J_3^2}{I_3}$$

Por añadidura, sabemos que la energía potencial viene dada por:

$$V = MgR \cos \theta$$

Por consiguiente, podemos definir V_{eff} , T_{eff} tales que $V_{eff} = \mathfrak{F}!(\theta)$ y $T = \mathfrak{F}!(\dot{\theta})$, obteniendo:

$$T_{eff}(\theta) := \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}^2$$

$$V_{eff}(\theta) := \frac{1}{2} \frac{(J_z - J_3 \cos \theta)^2}{I_1 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \frac{J_3^2}{I_3} + MgR \cos \theta$$

Ahora, como un campo constante es conservativo, la energía del sistema debe permanecer constante, luego debe ser:

$$T_{eff} + V_{eff} = T + V = \text{cte}$$

Estudiemos el comportamiento de la energía potencial efectiva cerca de los puntos críticos $\theta = 0, \pi$.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} V_{eff} = +\infty, \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi} V_{eff} = +\infty$$

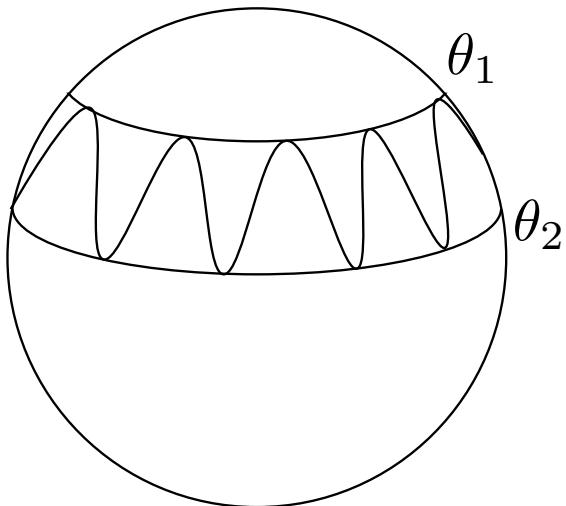
pues en ambos casos el término que diverge $\frac{1}{\sin^2 \theta}$ es siempre positivo. Así, por el teorema de Weierstrass, sabemos que hay mínimo absoluto en $(0, \pi)$ y que este debe alcanzarse en un mínimo local de la función V_{eff} . En consecuencia, para una energía dada E siempre deberá haber al menos dos valores de θ tales que $V_{eff}(\theta) = E$; llamemos a esos puntos θ_1 y θ_2 . Por último, como es $V_{eff} \leq E \forall \theta$, pues deberá ser $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \ \forall t \in \mathbb{R}$. $\mathbb{Q.E.D.}$

Observación 29. Consideremos un sólido rígido como el expuesto en la proposición 32 en la página 114. Por la proposición 30 en la página 111, sabemos que es:

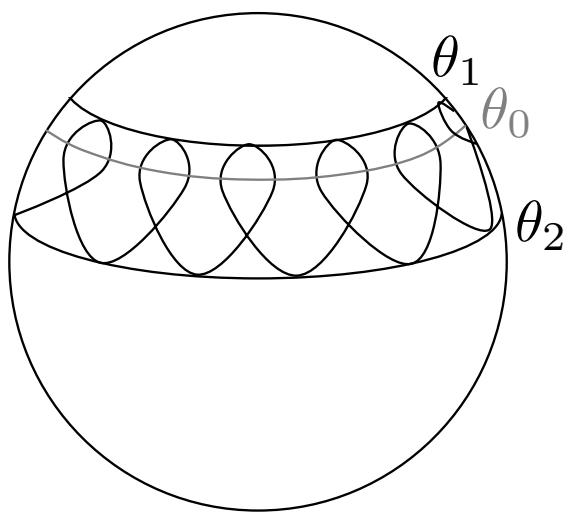
$$\dot{\varphi}(\theta) = \frac{J_z - J_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$$

donde $J_z, J_3 = \text{cte}$. Notemos que según los valores de J_z y J_3 , puede ser que $\dot{\varphi}$ varíe de signo para algún θ .

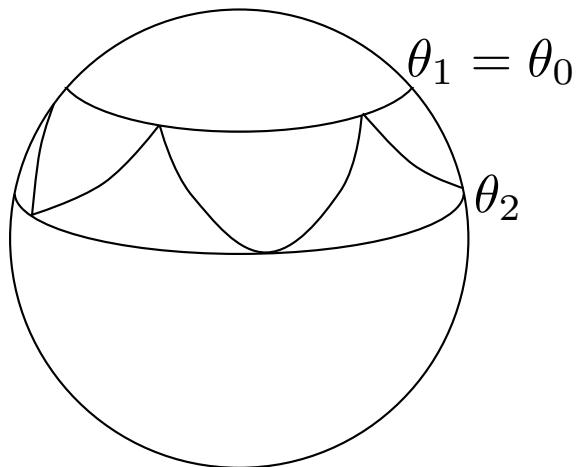
- Si es $J_z > J_3 \cos \theta \forall \theta \in [\theta_1, \theta_2]$, como son $J_z, J_3, I_1 > 0$, será siempre $\dot{\varphi} > 0$. Así, el vector \hat{e}_3 tendrá su final en alguna posición entre las líneas trazadas por θ_1 y θ_2 .



- Si, en cambio es $J_z < J_3 \cos \theta$ para al menos algún $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, entonces $\dot{\varphi}$ cambia de signo para cierto θ y el vector \hat{e}_3 pasará de moverse hacia adelante a moverse hacia atrás y viceversa. Nótese que, como el coseno es inyectivo en $[0, \pi]$, cuando se dé la condición anterior siempre existirá un único θ_0 tal que $J_z - J_3 \cos \theta = 0$.



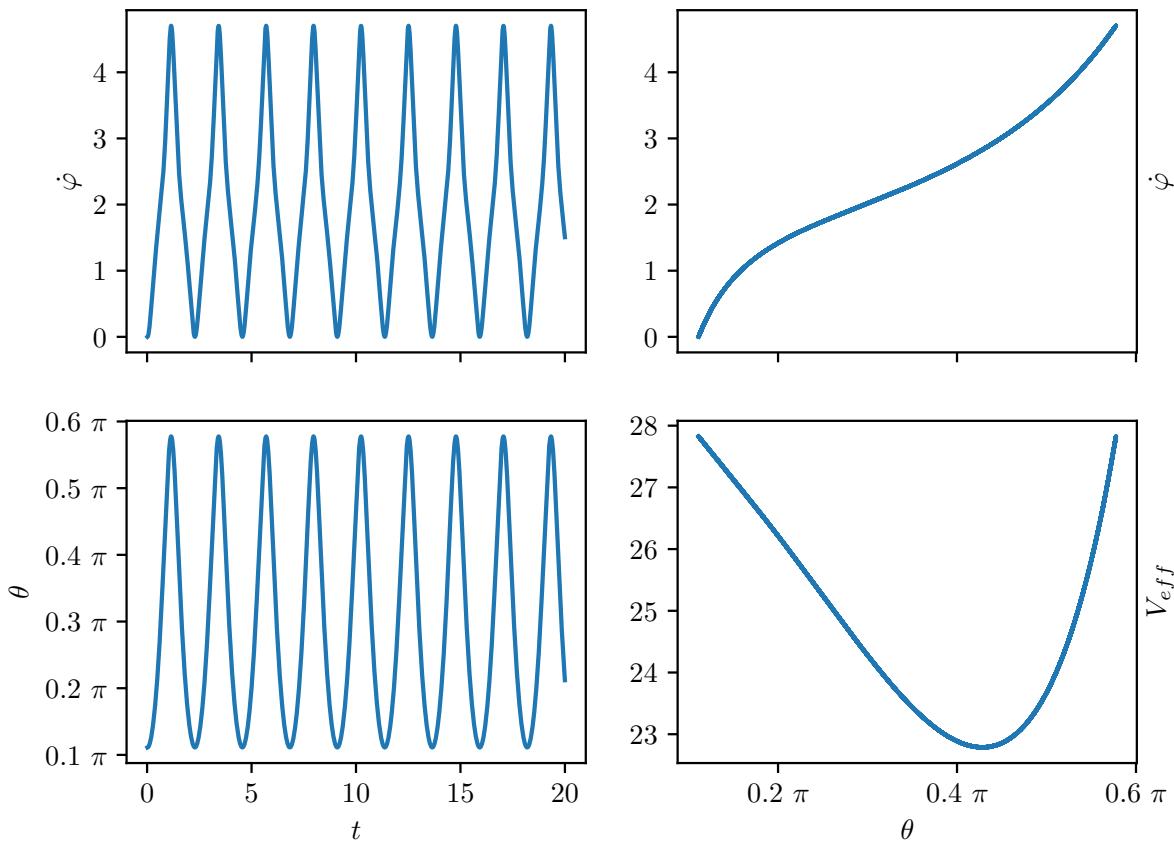
- Supongamos que es justo $\theta_0 = \theta_1$, es decir que es $\dot{\varphi}(\theta_1) = 0$. Entonces, el movimiento queda de la siguiente forma:



Ejemplo 17. Mediante tres simulaciones numéricas, vamos a intentar ilustrar cada uno de los casos expuestos en la observación 29 en la página anterior.

- Caso $\dot{\varphi}(\theta_1) = 0 \wedge \dot{\varphi}(\theta) > 0 \ \forall \theta \neq \theta_1$. Puede verse un vídeo al respecto aquí¹¹.

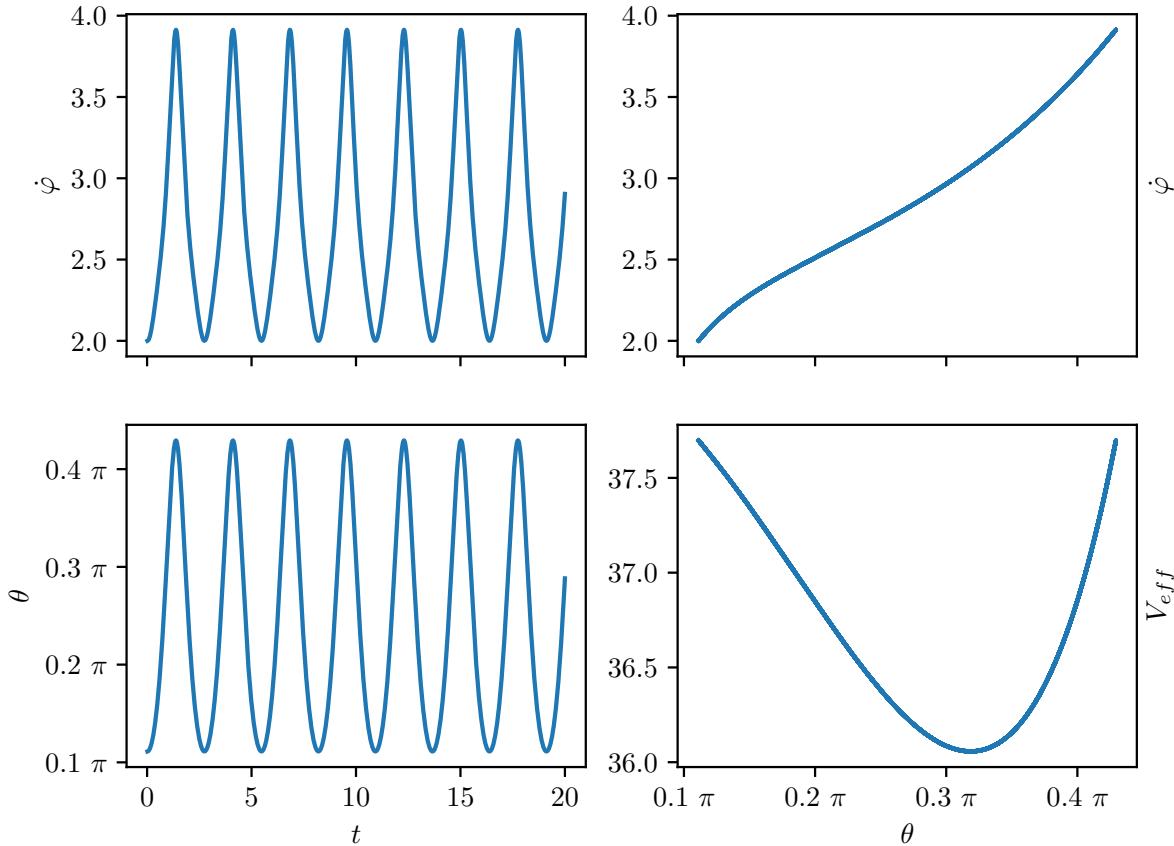
¹¹<https://www.youtube.com/watch?v=c000tpq3A-I>



En la gráfica anterior podemos ver la variación de θ y $\dot{\varphi}$ con respecto al tiempo t así como la variación de $\dot{\varphi}$ y V_{eff} (según definida en la proposición 32 en la página 114) con respecto a θ .

- Caso $\dot{\varphi}(\theta_1) > 0 \forall \theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Puede verse un vídeo al respecto aquí¹².

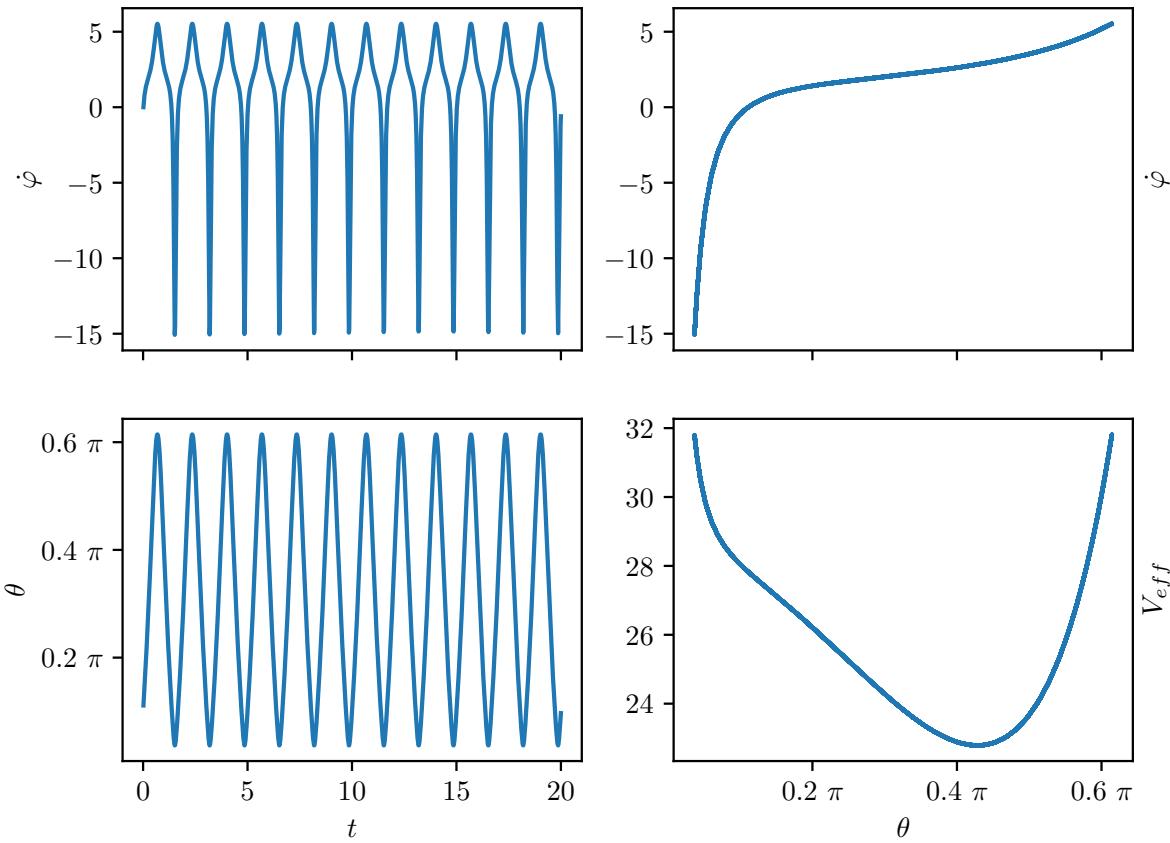
¹²<https://www.youtube.com/watch?v=hI4RBmg-sU4>



En la gráfica anterior podemos ver la variación de θ y $\dot{\varphi}$ con respecto al tiempo t así como la variación de $\dot{\varphi}$ y V_{eff} (según definida en la proposición 32 en la página 114) con respecto a θ .

- Caso del signo de $\dot{\varphi}$ oscilante. Puede verse un vídeo al respecto aquí¹³.

¹³<https://www.youtube.com/watch?v=WeISwLzQAUY>



En la gráfica anterior podemos ver la variación de θ y $\dot{\phi}$ con respecto al tiempo t así como la variación de $\dot{\phi}$ y V_{eff} (según definida en la proposición 32 en la página 114) con respecto a θ .

2.10. Problemas

Ejercicio 10 (Problema 2.5). Un cuerpo rígido formado por tres partículas de masas m , $2m$ y $4m$ situadas en los puntos $(2a, 0, 2a)$, $(a, -a, a)$ y $(-a, a, 0)$ respectivamente. Calcula el momento angular \vec{J} del cuerpo si gira alrededor del origen con velocidad angular $\vec{\omega} = b(3, -2, 4)$.

Solución. Sabemos por teoría que $\vec{J} = \vec{I}\vec{\omega}$ siendo \vec{I} el tensor de inercia del cuerpo. A su vez, las componentes de este vector vienen determinadas por las expresiones siguientes:

$$I_{xx} = \sum m_i(y_i^2 + z_i^2) \quad I_{xy} = -\sum m_i x_i y_i$$

(siendo $I_{xy} = I_{yx}$ y por tanto \vec{I} simétrica).

Así pues, calcularemos primero las componentes diagonales como:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum m_i(y_i^2 + z_i^2) = m[0^2 + (2a)^2] + 2m[(-a)^2 + a^2] + 4m[a^2 + 0^2] = \\ &= 4ma^2 + 4ma^2 + 4ma^2 = 12ma^2 \end{aligned}$$

$$I_{yy} = \sum m_i(x_i^2 + z_i^2) = m[(2a)^2 + (2a)^2] + 2m[a^2 + a^2] + 4m[(-a)^2 + 0^2] = \\ = 8ma^2 + 4ma^2 + 4ma^2 = 16ma^2$$

$$I_{zz} = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) = m[(2a)^2 + 0^2] + 2m[a^2 + (-a)^2] + 4m[(-a)^2 + a^2] = \\ = 4ma^2 + 4ma^2 + 8ma^2 = 16ma^2$$

A continuación se calcularán los elementos restantes, empleando la propiedad de $I_{xy} = I_{yx}$ para ahorrar cálculos:

$$I_{xy} = I_{yx} = -\sum m_i x_i y_i = -m(2a)(0) - 2m(a)(-a) - 4m(-a)(a) = -0 - 2ma^2 + 4ma^2 = \\ = 2ma^2$$

$$I_{yz} = I_{zy} = -\sum m_i y_i z_i = -m(0)(2a) - 2m(-a)(a) - 4m(a)(0) = -0 + 2ma^2 - 0 = \\ = 2ma^2$$

$$I_{zx} = I_{xz} = -\sum m_i x_i z_i = -m(2a)(2a) - 2m(a)(a) - 4m(-a)(0) = -4ma^2 - 2ma^2 - 0 = \\ = -6ma^2$$

Puesto que tenemos todos los componentes del tensor de inercia, podremos calcular el momento angular como:

$$\vec{J} = \vec{I}\vec{\omega} = ma^2 \begin{pmatrix} 12 & 2 & -6 \\ 2 & 16 & 2 \\ -6 & 2 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = ma^2 \begin{pmatrix} 8 \\ -18 \\ 42 \end{pmatrix} = 2ma^2 \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Q.E.F.

Ejercicio 11 (Problema 2.7). Un insecto de masa m está en reposo en el borde de un disco plano uniforme de masa M y radio R , que gira alrededor de un pivote sin rozamiento con velocidad angular ω . Si el insecto se mueve hacia el centro del disco, calcula la velocidad angular del disco cuando el insecto lo alcanza y lo que ha variado su energía cinética.

Solución. Sabemos por teoría que la variación del momento angular de un sistema es causado por fuerzas tanto internas como externas siguiendo la siguiente expresión:

$$\dot{\vec{J}} = \sum \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Puesto que nos informan de que la rotación en torno al pivote no genera rozamiento (y asumiendo que no existen otras influencias externas al sistema), podemos concluir que el sumatorio $\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ será nulo, es decir:

$$\dot{\vec{J}} = \sum \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}$$

En las fuerzas internas debemos considerar no solo las fuerzas entre los componentes del disco o del insecto, también deberemos considerar las interacciones entre el disco y el insecto (puesto que el sistema estudiado es el formado por ambos cuerpos). Asumiendo que tanto el disco como el insecto son cuerpos rígidos y estables, podremos decir que sus fuerzas internas son nulas (aquí se mete la explicación mágica de Andrés sobre que si hay fuerzas internas el sólido acelera hasta reventar); pero deberemos pararnos a pensar en el comportamiento de las interacciones entre el disco y el insecto.

Podemos obviar interacciones como el peso y la normal que genera el disco sobre el insecto, puesto que estas fuerzas se cancelarán entre si; sin embargo consideremos (puesto que no se nos indica lo contrario) que existe una cierta fuerza de rozamiento entre el disco y el insecto, en este caso, la fuerza será paralela al vector posición del insecto (suponiendo que el insecto presente un movimiento con dirección directa hacia el centro del disco, tomando este como centro de coordenadas), causando que $\vec{r}_{Insecto} \times \vec{F}_{Rozamiento} = 0$. De este modo, la variación del momento angular será nula y así, el momento angular \vec{J} será constante:

$$\dot{\vec{J}} = 0 \rightarrow \vec{J} = cte$$

Ahora bien, al ser un sistema con rotaciones deberemos considerar el momento de inercia tanto del disco como del insecto (consideraremos a este como una partícula puntual), para facilitar los cálculos solo consideraremos un momento de inercia escalar, que en el caso de un disco es igual a:

$$I_{Disco} = \frac{1}{2}MR^2$$

en el caso del momento de inercia de una partícula puntual a una distancia d del eje de rotación:

$$I_{Insecto} = md^2$$

Por lo tanto, tendremos que el momento de inercia del sistema cuando el insecto se encuentra a una cierta distancia d del centro del disco será:

$$I(d) = I_{Disco} + I_{Insecto} = \frac{1}{2}MR^2 + md^2$$

Ahora bien, la relación entre el momento angular y el momento de inercia viene determinada por la expresión $J = I\omega$, puesto que \vec{J} es constante, J también lo será, de modo que cuando el insecto de encuentra al borde del disco $d = R$ y cuando se encuentre en el centro del mismo $d = 0$, el momento angular será el mismo:

$$J_0 = J_f \rightarrow I(R)\omega_0 = I(0)\omega_f$$

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2 \right) \omega_0 = \left(\frac{1}{2}MR^2 + m0^2 \right) \omega_f$$

Así pues:

$$\omega_f = \omega_0 \left(1 + \frac{2m}{M} \right)$$

Habiendo calculado la velocidad angular del sistema una vez el insecto se ha desplazado desde el borde del disco hasta el centro del mismo, podremos calcular la variación de la energía cinética del sistema. Sabemos que la expresión que relaciona las cantidades antes calculadas es:

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Por lo tanto, la variación de energía cinética será igual a:

$$\Delta T = T_f - T_0 = \frac{1}{2}I(R)\omega_0^2 - \frac{1}{2}I(0)\omega_f^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2 \right) \omega_0^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}MR^2 + m0^2 \right) \omega_f^2$$

Sustituyendo ω_f por el valor anteriormente calculado:

$$\Delta T = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2 \right) \omega_0^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}MR^2 \right) \left(1 + \frac{2m}{M} \right)^2 \omega_0^2 =$$

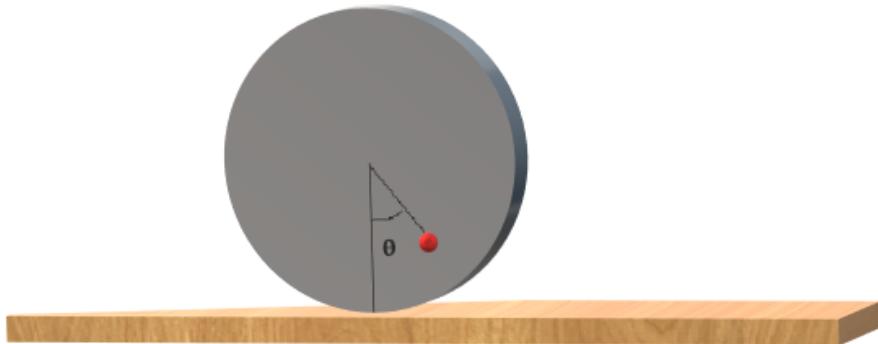
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}\omega_0^2 R^2 \left[\left(\frac{1}{2}M + m \right) - \frac{1}{2}MR^2 \left(1 + \frac{2m}{M} \right) \right] = \frac{1}{2}\omega_0^2 R^2 \left[\frac{1}{2}M \left(1 - 1 - \frac{2m}{M} \right) + m \right] = \\
 &= \frac{1}{2}\omega_0^2 R^2 \left[m - \frac{1}{2}M \left(\frac{2m}{M} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\Delta T = 0$$

Q.E.F.

Ejercicio 12 (Problema 2.9). Un disco uniforme de masa M y radio R se encuentra bajo un campo gravitatorio y tiene adherida una masa m puntual a una distancia a del centro del mismo. El disco puede rodar sin deslizar sobre un plano horizontal. Calcula la frecuencia de las pequeñas oscilaciones en torno al punto de equilibrio, si el plano que contiene el disco es vertical.



Solución. Este ejercicio se resolverá empleando mecánica lagrangiana, de modo que tendremos que señalizar las coordenadas que emplearemos; al encontrarnos limitados a un plano, solo emplearemos coordenadas x e y donde denotaremos con el subíndice d a las coordenadas del centro del disco y con el subíndice m a las coordenadas de la masa puntual. Así pues, recordando que el disco rueda sin deslizar, tendremos las expresiones siguientes:

$$x_d = -R\theta \quad y_d = R$$

$$x_m = x_d + a \sin \theta \quad y_m = y_d - a \cos \theta$$

Puesto que serán necesarias a continuación, calcularemos las derivadas temporales de las anteriores expresiones:

$$\dot{x}_d = -R\dot{\theta} \quad \dot{y}_d = 0$$

$$\dot{x}_m = \dot{x}_d + a\dot{\theta} \cos \theta \quad \dot{y}_m = \dot{y}_d + a\dot{\theta} \sin \theta$$

Puesto que debemos calcular el lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$, desarrollaremos estas magnitudes por separado:

$$T = T_d + T_m$$

Recordemos que el disco es un sólido rígido, por lo que su energía cinética será igual a la energía cinética del movimiento de su centro de masas sumado a la energía cinética de su rotación, esta última componente será $T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$, siendo para el caso de un disco $I = \frac{1}{2}MR^2$:

$$T = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}MR^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M(\dot{x}_d^2 + \dot{y}_d^2) \right] + \frac{1}{2}m(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}M \left(\frac{1}{2}R^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2}m \left[\left(-R\dot{\theta} + a\dot{\theta} \cos \theta \right)^2 + \left(a\dot{\theta} \sin \theta \right)^2 \right] = \\
&= \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m \left(R^2\dot{\theta}^2 + a^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta - Ra\dot{\theta}^2 \cos \theta + a^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \right) = \\
&= \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 \left(R^2 + a^2 - Ra \cos \theta \right)
\end{aligned}$$

Habiendo calculado la energía cinética, calcularemos la energía potencial (en este caso gravitatoria):

$$\begin{aligned}
V &= Mgy_d + mgy_m = g [MR + m(R - a \cos \theta)] = \\
&= g [R(M + m) - ma \cos \theta]
\end{aligned}$$

Teniendo las expresiones para la energía cinética y para la energía potencial, el lagrangiano de este sistema será el siguiente:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 (R^2 + a^2 - Ra \cos \theta) - g [R(M + m) - ma \cos \theta]$$

Para obtener la ecuación del movimiento de este sistema usaremos las ecuaciones de *Euler-Lagrange*:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 Ra \sin \theta - gma \sin \theta \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{3}{2}MR^2\dot{\theta} + m\dot{\theta} (R^2 + a^2 - Ra \cos \theta) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta} + m\ddot{\theta} (R^2 + a^2 - Ra \cos \theta) + m\dot{\theta}^2 Ra \sin \theta
\end{aligned}$$

Así pues, por las ecuaciones de *Euler-Lagrange*:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 Ra \sin \theta - gma \sin \theta \right] - \left[\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta} + m\ddot{\theta} (R^2 + a^2 - Ra \cos \theta) + m\dot{\theta}^2 Ra \sin \theta \right] &= 0 \\
-\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 Ra \sin \theta - gma \sin \theta - \frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta} - m\ddot{\theta} (R^2 + a^2 - Ra \cos \theta) &= 0 \\
-m\dot{\theta}^2 Ra \sin \theta - 2gma \sin \theta &= 3MR^2\ddot{\theta} + 2m\ddot{\theta} (R^2 + a^2 - Ra \cos \theta)
\end{aligned}$$

Ahora bien, si consideramos (tal como nos dicta el enunciado) oscilaciones pequeñas, podremos efectuar ciertas aproximaciones; la primera de ellas es que si θ es pequeño $\dot{\theta}^2 \approx 0$, además de esto, emplearemos las más que conocidas aproximaciones (para ángulos pequeños) $\sin \theta \approx \theta$ y $\cos \theta \approx 1$; de este modo, la anterior expresión será (para pequeñas oscilaciones) equivalente a:

$$-2gma\theta = 3MR^2\ddot{\theta} + 2m\ddot{\theta} (R^2 + a^2 - Ra)$$

Reordenando los términos, observamos la expresión de un oscilador armónico:

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} [3MR^2 + 2m(R^2 + a^2 - Ra)] + 2gma\theta &= 0 \\
\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left[\frac{2gma}{3MR^2 + 2m(R^2 + a^2 - Ra)} \right] \theta &= 0
\end{aligned}$$

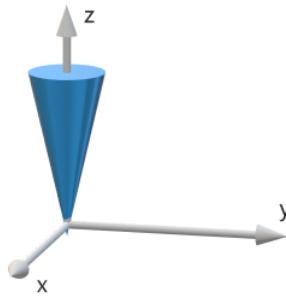
Por lo tanto, la frecuencia para pequeñas oscilaciones de este sistema será:

$$\omega = \sqrt{\frac{2gma}{3MR^2 + 2m(R^2 + a^2 - Ra)}}$$

Q.E.F.

Ejercicio 13 (Problema 2.11). Calcula los momentos principales de inercia alrededor del vértice de un cono macizo uniforme de altura h y radio R . ¿Para qué valor del cociente $\frac{h}{R}$ son ejes principales cualquier eje que pase por el vértice?

Solución. Tomando como ejes \hat{x} , \hat{y} y \hat{z} los mostrados en la siguiente imagen (siendo \hat{z} aquel que pase por el eje de simetría del cono y \hat{x} e \hat{y}) dos ejes ortonormales entre si y con \hat{z} cualesquiera), tendremos que la matriz de inercia $\tilde{\mathbb{I}}$ será diagonal, con sus componentes verticales I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} siendo los momentos principales de inercia: Estos momentos principales de inercia cumplirán que $I_{xx} = I_{yy}$, puesto que por simetrías de rotación



estos dos ejes pueden ser arbitrarios (siempre que se encuentren en el plano normal a \hat{z}), por lo visto en teoría, estos momentos se calcularán como:

$$I_{xx} = I_{yy} = \iiint_V \rho(\vec{r})(y^2 + z^2) dV$$

$$I_{zz} = \iiint_V \rho(\vec{r})(x^2 + y^2) dV$$

Puesto que el enunciado dicta que el cono es macizo y uniforme, podremos decir que $\rho(\vec{r}) = \rho = cte$.

Tomando coordenadas cilíndricas, tendremos los cambios:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad dV = r d\theta dr dz$$

En cuanto a los límites de integración, θ variará entre 0 y 2π , z entre 0 y h mientras que r dependerá de la altura del cono a la que nos encontremos. Calculemos pues, los momentos de inercia I_{xx} e I_{yy} :

$$I_{xx} = I_{yy} = \iiint_V \rho(y^2 + z^2) dV = \rho \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h \int_{r=0}^{r(z)} (r^2 \sin^2 \theta + z^2) r d\theta dr dz$$

Para conocer la función $r(z)$ (esto es, el radio del cono en relación a la altura), solo debemos estudiar el ángulo de apertura del cono (el cual permanecerá constante). La tangente de este ángulo (llamémoslo α) será igual a:

$$\tan \alpha = \frac{R}{h} = cte = \frac{r(z)}{z} \rightarrow r(z) = \frac{Rz}{h}$$

Así pues:

$$I_{xx} = I_{yy} = \iiint_V \rho(y^2 + z^2) dV = \rho \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h \int_{r=0}^{Rz/h} (r^2 \sin^2 \theta + z^2) r d\theta dr dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \rho \left[\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h \int_{r=0}^{Rz/h} r^3 \sin^2 \theta d\theta dr dz + \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h \int_{r=0}^{Rz/h} r z^2 d\theta dr dz \right] = \\
&= \rho \left[\left(-\frac{\sin 2\theta - 2\theta}{4} \Big|_0^{2\pi} \right) \int_{z=0}^h \int_{r=0}^{Rz/h} r^3 dr dz + 2\pi \int_{z=0}^h \int_{r=0}^{Rz/h} r z^2 dr dz \right] = \\
&= \rho \left[\pi \int_{z=0}^h \left(\frac{r^4}{4} \Big|_0^{\frac{Rz}{h}} \right) dz + 2\pi \int_{z=0}^h \left(\frac{r^2}{2} \Big|_0^{\frac{Rz}{h}} \right) z^2 dz \right] = \\
&= \rho \pi \left[\frac{1}{4} \int_{z=0}^h \frac{R^4 z^4}{h^4} dz + \int_{z=0}^h \frac{R^2 z^4}{h^2} dz \right] = \\
&= \rho \pi \left[\frac{1}{4} \frac{R^4}{h^4} \left(\frac{z^5}{5} \Big|_0^h \right) + \frac{R^2}{h^2} \left(\frac{z^5}{5} \Big|_0^h \right) \right] = \rho \pi \frac{1}{5} \left[\frac{1}{4} R^4 h + R^2 h^3 \right]
\end{aligned}$$

Puesto que el volumen V de un cono es igual a $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, lo anterior puede ser reescrito en función de la masa M del cono (ya que $M = \rho V$):

$$\rho \pi \frac{1}{5} \left[\frac{1}{4} R^4 h + R^2 h^3 \right] = \rho V \frac{3}{5} \left[\frac{1}{4} R^2 + h \right] = \frac{3}{5} M \left[\frac{1}{4} R^2 + h \right]$$

El procedimiento a seguir con I_{zz} es prácticamente el mismo (empleando mismos límites de integración incluso), solo que este momento se calculará como:

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \iiint_V \rho(\vec{r})(x^2 + y^2) dV = \rho \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h \int_{r=0}^{Rz/h} (r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta) r d\theta dr dz = \\
&= \rho \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h \int_{r=0}^{Rz/h} r^3 d\theta dr dz = 2\pi \rho \int_{z=0}^h \int_{r=0}^{Rz/h} r^3 dr dz = \\
&= 2\pi \rho \int_{z=0}^h \left(\frac{r^4}{4} \Big|_0^{\frac{Rz}{h}} \right) dz = \frac{1}{2} \frac{R^4}{h^4} \rho \pi \int_0^h z^4 dz = \\
&= \frac{1}{2} \frac{R^4}{h^4} \rho \pi \left(\frac{z^5}{5} \Big|_0^h \right) = \rho \pi \frac{R^4 h}{10} = \frac{3}{10} V \rho R^2 = \frac{3}{10} M R^2
\end{aligned}$$

El enunciado nos pregunta a continuación el valor del cociente $\frac{h}{R}$ para que todo eje que pase por el vértice sea eje principal de inercia; si todo eje que pase por el eje es eje principal de inercia, eso indica que debe cumplirse:

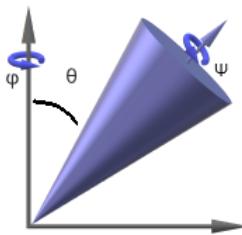
$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} \rightarrow \frac{3}{5} M \left[\frac{1}{4} R^2 + h \right] = \frac{3}{10} M R^2 \rightarrow \frac{h}{R} = \frac{1}{2}$$

Q.E.F.

Ejercicio 14 (Problema 2.15). Un cono macizo de masa M , radio R y altura h rota con velocidad angular ω en torno a su eje de simetría, siendo su vértice un punto fijo. Si se supone que no hay nutación y se sabe que su velocidad de precesión es Ω , calcula la energía cinética del cono.

Solución. Sabemos que el tensor de inercia de un cono en torno a su vértice (tomando como ejes de coordenadas sus ejes principales) es el siguiente:

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} = 3M \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \left(h^2 + \frac{R^2}{4} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \left(h^2 + \frac{R^2}{4} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} R^2 \end{pmatrix}$$



Según los datos del enunciado, tendremos que para los ángulos de Euler se cumplirá que:

$$\dot{\varphi} = \Omega \quad \dot{\psi} = \omega \quad \dot{\theta} = 0$$

Sabemos por teoría que la expresión de la velocidad angular $\vec{\omega}$ en términos de los ángulos de Euler es la siguiente:

$$\vec{\omega} = -\dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_1 + \dot{\theta} \hat{e}_2 + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \hat{e}_3 = -\dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_1 + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \hat{e}_3$$

La energía cinética T de un sólido rígido en revolución vendrá determinada por la expresión:

$$T = \frac{1}{2} \sum I_i \omega_i^2$$

Donde definiremos ω_i como el término que acompaña a \hat{e}_i , es decir:

$$\omega_1 = -\dot{\varphi} \sin \theta \quad \omega_2 = 0 \quad \omega_3 = (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})$$

Por ello:

$$\begin{aligned} T &= \frac{3}{2} M \left[\frac{1}{5} \left(h^2 + \frac{R^2}{4} \right) (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + \left(\frac{1}{10} R^2 \right) (\dot{\varphi} \sin \theta)^2 \right] = \\ &= \frac{3}{2} M \left[\frac{1}{5} \left(h^2 + \frac{R^2}{4} \right) (\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \theta) + \frac{1}{10} R^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right] = \\ &= \frac{3}{2} M \left[\frac{1}{10} R^2 \dot{\varphi}^2 \left(\sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{10} \right) + \frac{1}{5} h^2 \left(\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \theta \right) + \frac{R^2}{10} \dot{\psi} \left(\frac{\dot{\varphi}}{10} + \dot{\varphi} \cos \theta \right) \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores derivados de los ángulos de Euler:

$$T = \frac{3}{2} M \left[\frac{1}{10} R^2 \Omega^2 \left(\sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{10} \right) + \frac{1}{5} h^2 \left(\Omega^2 \cos^2 \theta + \omega^2 + 2\omega\Omega \cos \theta \right) + \frac{R^2}{10} \omega \left(\frac{\Omega}{10} + \Omega \cos \theta \right) \right]$$

Q.E.F.

Capítulo 3

Pequeñas oscilaciones y modos normales de oscilación

En general, vamos a suponer que tenemos siempre sistemas conservativos con un número de grados de libertad igual al número de coordenadas generalizadas. Por lo tanto, vamos a tener siempre un número n de coordenadas generalizadas que denotaremos con (q_1, q_2, \dots, q_n) y el tiempo t . Supondremos, además, que la posición de equilibrio de nuestro sistema se alcanza cuando las coordenadas generalizadas se anulan $q_1, \dots, q_n = 0$.

3.1. Coordenadas ortogonales

Definición 25. Sea un sistema de n grados de libertad. Diremos que unas coordenadas generalizadas $\{q_i\}_{i=1}^n$ son **ortogonales** si la energía cinética del sistema puede expresarse como:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2$$

Es decir, si en la expresión de la energía cinética no aparecen términos cruzados.

Lema 1 (Teorema de Gauss-Lagrange). *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y ϕ una forma cuadrática. Entonces, existe un cambio de base en V que reduce ϕ a su forma diagonal.*

Demostración. Haremos inducción sobre la dimensión del espacio vectorial n . Sea $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^n$ una base arbitraria de V y sea $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \hat{e}_i$ un vector genérico de V . Además, llamaremos $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ a la matriz hermítica asociada a la forma cuadrática ϕ ; de manera que es:

$$\phi(\vec{x}) = \vec{x}^\dagger A \vec{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \bar{x}_i x_j$$

donde con la daga \dagger denotamos «transpuesto conjugado».

- $n = 1$: En este caso es:

$$\phi(\vec{x}) = a_{11} \bar{x}_1 x_1$$

que claramente está expresado en forma diagonal.

- Supongamos que la hipótesis se cumple para $n - 1$ y veamos que se cumple para n . A su vez, distingamos ahora dos casos:

1. Existe un índice $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_{ii} \neq 0$: Podemos suponer sin pérdida de generalidad que dicho coeficiente es el a_{11} ; si no lo es, reordenamos las variables hasta que lo sea. De esta forma, tenemos:

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_i x_j = a_{11} x_1^2 + x_1 \sum_{i=2}^n a_{i1} \bar{x}_i + \bar{x}_1 \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij} \bar{x}_i x_j \quad (3.1.1)$$

Ahora definimos:

$$\varphi(x_2, \dots, x_n) := -\frac{1}{a_{11}} \left| \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j \right|^2 + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij} \bar{x}_i x_j \quad (3.1.2)$$

que es una forma cuadrática de $n - 1$ variables x_2, \dots, x_n . A continuación, consideramos:

$$\begin{aligned} L &:= \frac{1}{a_{11}} \left| \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \right|^2 - \frac{1}{a_{11}} \left| \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j \right|^2 = \\ &= \frac{1}{a_{11}} \left[\left(\sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \right) - \left(\sum_{i=2}^n a_{1i} x_i \right) \left(\sum_{j=2}^n a_{1j} x_j \right) \right] = \\ &= \frac{1}{a_{11}} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{a}_{1i} a_{ij} \bar{x}_i x_j - \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n \bar{a}_{1i} a_{ij} \bar{x}_i x_j \right] \end{aligned}$$

Como la matriz A es hermítica, se da $\bar{a}_{ij} = a_{ji} \forall i, j = 1, \dots, n$. Por tanto, podemos expresar lo anterior como:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{a_{11}} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i1} a_{1j} \bar{x}_i x_j - \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{i1} a_{1j} \bar{x}_i x_j \right] = \\ &= \frac{1}{a_{11}} \left[a_{11} a_{11} \bar{x}_1 x_1 + \sum_{i=2}^n a_{i1} a_{11} \bar{x}_i x_1 + \sum_{j=2}^n a_{11} a_{1j} \bar{x}_1 x_j \right] = \\ &= a_{11} \bar{x}_1 x_1 + x_1 \sum_{i=2}^n a_{i1} \bar{x}_i + \bar{x}_1 \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j \quad (3.1.3) \end{aligned}$$

Mediante la ecuación 3.1.3 podemos expresar la ecuación 3.1.1 como:

$$\phi(\vec{x}) = L + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij} \bar{x}_i x_j = \frac{1}{a_{11}} \left| \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \right|^2 - \frac{1}{a_{11}} \left| \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j \right|^2 + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij} \bar{x}_i x_j$$

haciendo uso de la ecuación 3.1.2, podemos escribir lo anterior como:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{a_{11}} \left| \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \right|^2 + \varphi(x_2, \dots, x_n)$$

Hacemos el cambio de variables:

$$y_1 = \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j, \quad y_2 = x_2, \quad \dots, \quad y_n = x_n$$

con lo que obtenemos:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + \varphi(y_2, \dots, y_n)$$

Por hipótesis de inducción, existe un cambio de coordenadas que permite expresar φ en forma diagonal. Haciendo uso de ese cambio y de la definición de y_1 obtendremos una forma diagonal en la que expresar ϕ .

2. $a_{ii} = 0 \forall i = 1, \dots, n$: Supongamos que existe un a_{ij} con $i \neq j$ tal que $\operatorname{Re}(a_{ij}) \neq 0$. Si no fuese así, entonces extraemos factor común i y obtenemos una forma cuadrática que ya satisface la condición mencionada; a menos que sea $A = (0)$ en cuyo caso ϕ ya sería diagonal. De esta forma, podemos suponer sin pérdida de generalidad que es $\operatorname{Re}(a_{12}) \neq 0$; si no fuese así, reordenamos las variables hasta que lo sea. Tomaremos el cambio de variables:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2, & y_2 &= x_1 - x_2, & y_3 &= x_3, & \dots, & y_n &= x_n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1 = y_1 + y_2, & x_2 = y_1 - y_2, & x_3 = y_3, & \dots, & x_n = y_n \end{aligned}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_i x_j = \underbrace{a_{11}}_{=0} (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) (y_1 + y_2) + a_{12} (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) (y_1 - y_2) + \\ &\quad + a_{21} (\bar{y}_1 - \bar{y}_2) (y_1 + y_2) + \underbrace{a_{22}}_{=0} (\bar{y}_1 - \bar{y}_2) (y_1 - y_2) + \\ &\quad + \sum_{i=3}^n a_{i1} \bar{y}_i (y_1 + y_2) + \sum_{j=3}^n a_{1j} (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) y_j + \sum_{i=3}^n a_{i2} \bar{y}_i (y_1 - y_2) + \\ &\quad + \sum_{j=3}^n a_{2j} (\bar{y}_1 - \bar{y}_2) y_j + \sum_{i=3}^n \sum_{j=3}^n a_{ij} \bar{y}_i y_j = \\ &= a_{12} (\bar{y}_1 y_1 + \bar{y}_2 y_1 - \bar{y}_1 y_2 - \bar{y}_2 y_2) + a_{21} (\bar{y}_1 y_1 - \bar{y}_2 y_1 + \bar{y}_1 y_2 - \bar{y}_2 y_2) + \\ &\quad + (y_1 + y_2) \sum_{i=3}^n a_{i1} \bar{y}_i + (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) \sum_{j=3}^n a_{1j} y_j + \sum_{i=3}^n \sum_{j=3}^n a_{ij} \bar{y}_i y_j \end{aligned}$$

Como es $a_{12} = \bar{a}_{21}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= (a_{12} + \bar{a}_{12}) (y_1^2 - y_2^2) + (a_{12} - \bar{a}_{12}) (\bar{y}_2 y_1 - \bar{y}_1 y_2) + \\ &\quad + (y_1 + y_2) \sum_{i=3}^n a_{i1} \bar{y}_i + (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) \sum_{j=3}^n a_{1j} y_j + \sum_{i=3}^n \sum_{j=3}^n a_{ij} \bar{y}_i y_j = \\ &= \underbrace{2\operatorname{Re}(a_{12})}_{*} (y_1^2 - y_2^2) + 2\operatorname{Im}(\bar{y}_2 y_1 - \bar{y}_1 y_2) + \\ &\quad + (y_1 + y_2) \sum_{i=3}^n a_{i1} \bar{y}_i + (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) \sum_{j=3}^n a_{1j} y_j + \sum_{i=3}^n \sum_{j=3}^n a_{ij} \bar{y}_i y_j \end{aligned}$$

donde el término marcado con * es el coeficiente de y_1^2 que es distinto de cero por hipótesis. En consecuencia, podemos aplicar el punto 1.

Q.E.D.

Proposición 33. *Sea un sistema con n grados de libertad. Siempre existen coordenadas generalizadas ortogonales.*

Demostración. La demostración se basa en que, en su forma más general, la energía cinética es una forma cuadrática. Llamemos $\{q_i\}_{i=1}^n$ a un conjunto de coordenadas generalizadas de nuestro sistema. Entonces, sabemos que existe un matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ tal que:

$$T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \dot{q}^T A \dot{q}$$

donde T indica «transpuesto».

Por el teorema de Gauss-Lagrange (ver lema 1 en la página 128), sabemos que dada una forma cuadrática $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, existe una base B en \mathbb{R}^3 para la cual la expresión de A es diagonal. Si A es diagonal, entonces tenemos:

$$T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} a_{ij} \delta_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} a_{ii} \dot{q}_i^2$$

Y, por la definición 25 en la página 128, las coordenadas $\{q_i\}_{i=1}^n$ son ortogonales. Q.E.D.

Ejemplo 18 (Deducción de existencia de coordenadas ortogonales para $n = 2$). Supongamos que tenemos un sistema con $n = 2$ partículas.

$$T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}_1^2 + \underbrace{a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2}_* + \frac{1}{2} a_{22} \dot{q}_2^2$$

donde el término $*$ es el llamado término de acople. Ahora, vamos a usar el cambio de coordenadas:

$$q'_1 = q_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} q_2$$

$$q'_2 = q_2$$

Estas coordenadas nos van a permitir escribir la energía cinética sin términos de acople. Despejando, tenemos:

$$\begin{cases} q_1 = q'_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} q'_2 \\ q_2 = q'_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_1 = \dot{q}'_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} \dot{q}'_2 \\ \dot{q}_2 = \dot{q}'_2 \end{cases}$$

Sustituyendo, llegamos a:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} a_{11} \left(\dot{q}'_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} \dot{q}'_2 \right)^2 + a_{12} \left(\dot{q}'_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} \dot{q}'_2 \right) \dot{q}'_2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{q}'_2^2 = \\ &= \frac{1}{2} a_{11} \left(\dot{q}'_1^2 + \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} \right)^2 \dot{q}'_2^2 - 2 \frac{a_{12}}{a_{11}} \dot{q}'_1 \dot{q}'_2 \right) + \dot{q}'_1 \dot{q}'_2 a_{12} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} \dot{q}'_2^2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{q}'_2^2 = \\ &= \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}'_1^2 + \frac{1}{2} \frac{a_{12}^2}{a_{11}} \dot{q}'_2^2 - a_{12} \dot{q}'_1 \dot{q}'_2 + a_{12} \dot{q}'_1 \dot{q}'_2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} \dot{q}'_2^2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{q}'_2^2 = \\ &= \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}'_1^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\left[a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} \right]}_{=: a'_{22}} \dot{q}'_2^2 \end{aligned}$$

Definición 26. Sea un sistema de n grados de libertad. Diremos que unas coordenadas generalizadas $\{q_i\}_{i=1}^n$ son **ortonormales** si la energía cinética del sistema puede expresarse como:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \dot{q}_i^2$$

Proposición 34. *Sea un sistema de n grados de libertad. Siempre existen coordenadas ortonormales.*

Demostración. Por la proposición 33 en la página anterior, sabemos que existen coordenadas $\{q_i\}_{i=1}^n$ tales que permiten expresar T como sigue:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} a_{ii} \dot{q}_i^2$$

donde $a_{ii} \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, n$, ya que debe ser $T \geq 0$ independientemente del valor de las $\{\dot{q}_i\}_{i=1}^n$. Por tanto, podemos definir las coordenadas generalizadas:

$$\begin{aligned} c_i &:= \sqrt{a_{ii}} q_i \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{c}_i &= \sqrt{a_{ii}} \dot{q}_i \quad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

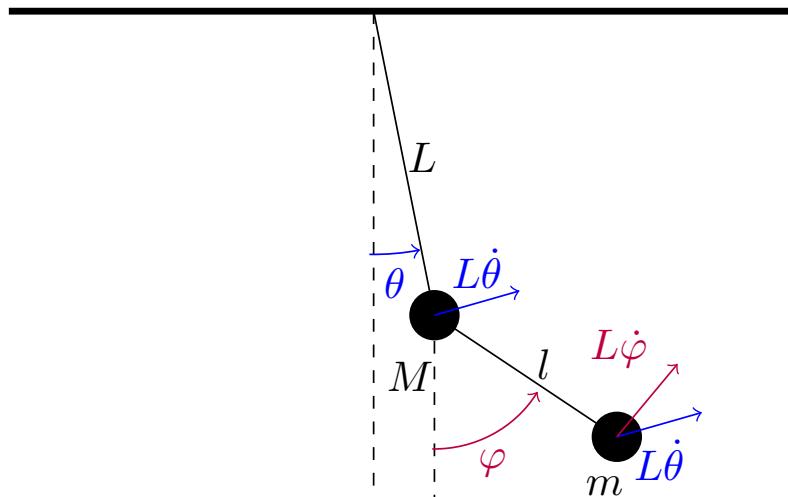
que permiten expresar la energía cinética como:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} a_{ii} \dot{q}_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \sqrt{a_{ii}} q_i \sqrt{a_{ii}} q_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (\sqrt{a_{ii}} q_i)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \dot{c}_i^2$$

Por la definición 26, tenemos que las coordenadas $\{c_i\}_{i=1}^n$ son ortonormales entre sí. Q.E.D.

Definición 27. Diremos que una oscilación es **pequeña** si es razonable aproximar su función energética potencial y su función energía cinética asociada a segundo orden mediante un desarrollo de Taylor.

Ejemplo 19 (Péndulo doble). Tenemos un péndulo doble de longitudes L y l y de masas M y m como se expone en la siguiente ilustración:



Dado el sistema, diríase que lo más sencillo es utilizar coordenadas angulares. Así, tenemos:

$$x_M = L \sin \theta, \quad y_M = L \cos \theta$$

$$x_m = L \sin \theta + l \sin \varphi, \quad y_m = L \cos \theta + l \cos \varphi$$

Derivando, llegamos a:

$$\begin{aligned}\dot{x}_M &= L \cos \theta \dot{\theta}, \quad \dot{y}_M = -L \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{x}_m &= L \cos \theta \dot{\theta} + l \cos \varphi \dot{\varphi}, \quad \dot{y}_m = -L \sin \theta \dot{\theta} - l \sin \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 &= L^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + L^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 = L^2 \dot{\theta}^2 \\ \dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2 &= L^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + l^2 \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + 2Ll \cos \theta \cos \varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} + \\ &+ L^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + 2Ll \sin \theta \sin \varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} = \\ &= L^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2Ll \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos(\varphi - \theta)\end{aligned}$$

En consecuencia, la energía cinética queda:

$$\begin{aligned}T_M &= \frac{1}{2} M (L \dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 \\ T_m &= \frac{1}{2} m (L^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2Ll \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos(\varphi - \theta)) \\ T &= \frac{1}{2} (M + m) L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + m L l \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos(\varphi - \theta)\end{aligned}$$

Notemos que θ, φ no son ortogonales, porque hay un término cruzado.

Supondremos que las oscilaciones son pequeñas. De esta forma, por la definición 27 en la página anterior, podemos hacer una oscilación a segundo orden de la energía cinética, obteniendo:

$$\begin{aligned}T &\approx \frac{1}{2} (M + m) L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + m L l \dot{\theta} \dot{\varphi} \left(1 - \frac{(\varphi - \theta)^2}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} (M + m) L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + m L l \dot{\theta} \dot{\varphi} - m L l \dot{\theta} \dot{\varphi} \frac{1}{2} (\varphi^2 - 2\varphi\theta + \theta^2) = \\ &= \frac{1}{2} (M + m) L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + \underbrace{m L l \dot{\theta} \dot{\varphi}}_{\text{orden 2}} - \underbrace{\frac{1}{2} m L l \dot{\theta} \dot{\varphi} \varphi^2}_{\text{orden 4}} + \underbrace{m L l \dot{\theta} \dot{\varphi} \theta \varphi}_{\text{orden 4}} - \underbrace{\frac{1}{2} m L l \dot{\theta} \dot{\varphi} \theta^2}_{\text{orden 4}}\end{aligned}$$

Como estamos haciendo un desarrollo de Taylor a orden 2, despreciaremos todos los términos de orden 4. Así, obtenemos:

$$T \approx \frac{1}{2} (M + m) L^2 \dot{\theta}^2 + m L l \dot{\theta} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

Vamos a tomar como coordenadas generalizadas $q_1 := L\theta$ y $q_2 = l\varphi$. Nótese que en nuestro caso es:

$$a_{11} = (M + m), \quad a_{12} = m, \quad a_{22} = m$$

Consideramos el cambio:

$$\begin{aligned}q'_1 &= q_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} q_2 = L\theta + \frac{m}{M + m} l\varphi \\ q'_2 &= l\varphi\end{aligned}$$

Y también el cambio:

$$\begin{aligned}q'_2 &= q_2 + \frac{a_{12}}{a_{22}} q_1 = l\varphi + \frac{m}{m} L\theta = l\varphi + L\theta = q_1 + q_2 \\ q'_1 &= L\theta\end{aligned}$$

Ambos son igualmente válidos, pero la segunda opción parece más sencilla. Utilizando esta segunda solución, obtenemos:

$$T = \frac{1}{2} M q'_1^2 + \frac{1}{2} m q'_2^2$$

Ahora, podríamos definir unas nuevas coordenadas generalizadas para que sean ortonormales:

$$q_1'' := \sqrt{M} q_1'$$

$$q_2'' := \sqrt{m} q_2'$$

Así, obtendríamos:

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}''_1^2 + \frac{1}{2} \dot{q}''_2^2$$

Q.E.F.

Proposición 35 (Ecuaciones del movimiento para pequeñas oscilaciones). *Sea un sistema de n grados de libertad sometido a pequeñas oscilaciones y sea V la función potencial asociada al sistema. Además, sean $\{q_i\}_{i=1}^n$ coordenadas generalizadas **ortogonales** para dicho sistema que cumplen $\vec{Q} = \vec{0}$ en un punto de equilibrio del sistema y que permiten expresar la energía cinética como:*

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_{ii} \dot{q}_i^2$$

siendo $m_{ij} = 0 \forall i \neq j$. Es decir, la matriz $M = (m_{ij})$ es diagonal.

Entonces se satisface:

$$M \ddot{Q} \approx -KQ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{pmatrix} \approx - \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

donde $Q = (q_1, \dots, q_n) \Rightarrow \dot{Q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \Rightarrow \ddot{Q} = (\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_n)$ y $K = (k_{ij})_{i,j=1}^3$ viene dada por:

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \left(Q = \vec{0} \right) \quad \forall i, j = 1, 2, 3$$

Demostración. Por hipótesis, podemos expresar la energía cinética del sistema como:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_{ii} \dot{q}_i^2$$

Consideremos el lagrangiano del sistema:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_{ii} \dot{q}_i^2 - V$$

Por el teorema 5 en la página 35, obtenemos las siguientes ecuaciones del movimiento:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \Leftrightarrow -\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} (m_{ii} \dot{q}_i) \Leftrightarrow m_{ii} \ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (3.1.4)$$

Como el sistema está sometido a pequeñas oscilaciones, por la definición 27 en la página 132, podemos aproximar la función V a segundo orden, obteniendo:

$$V(Q) = V(Q = \vec{0}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_i} (Q = \vec{0}) q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} (Q = \vec{0}) q_i q_j + o(|Q|^2) \quad \text{cuando } Q \rightarrow \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V(Q) = V(Q = \vec{0}) + \vec{\nabla}V(Q = \vec{0}) \cdot Q + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}(Q = \vec{0}) q_i q_j + o(|Q|^2) \text{ cuando } Q \rightarrow \vec{0}$$

Por hipótesis, el punto de equilibrio del sistema viene dado por $Q = \vec{0}$. Por definición de punto de equilibrio, sabemos que la fuerza total que actúa cuando el sistema se encuentra en esa posición es nula, luego se da $-\vec{\nabla}V(Q = \vec{0}) = \vec{F}(Q = \vec{0}) = \vec{0}$. De esta forma, la ecuación anterior se simplifica a:

$$V(Q) = V(Q = \vec{0}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}(Q = \vec{0}) q_i q_j + o(|Q|^2) \text{ cuando } Q \rightarrow \vec{0}$$

Usando la matriz $K = (k_{ij})_{i,j=1}^3$ podemos reescribir lo anterior como:

$$V(Q) = V(Q = \vec{0}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j + o(|Q|^2) \text{ cuando } Q \rightarrow \vec{0}$$

Hallemos las parciales de V aproximado con respecto a cada una de las coordenadas q_l :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_l} &\approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial q_l} (k_{ij} q_i q_j) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial q_l} (k_{ll} q_l^2) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \frac{\partial}{\partial q_l} (k_{lj} q_l q_j) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n \frac{\partial}{\partial q_l} (k_{il} q_i q_l) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \frac{\partial}{\partial q_l} (k_{ij} q_i q_j) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[2k_{ll} q_l + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n k_{lj} q_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n k_{il} q_i \right] \end{aligned}$$

donde lo anterior es válido $\forall l = 1, \dots, n$. Nótese que por la definición de la matriz K , como el potencial V es $C^{(2)}$ (en caso contrario, no podríamos hacer su desarrollo de Taylor), es $k_{ij} = k_{ji} \forall i, j = 1, 2, 3$. Por tanto, podemos reescribir lo anterior como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_l} &\approx \frac{1}{2} \left[2k_{ll} q_l + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n k_{lj} q_j + q_l \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n k_{li} q_i \right] = \frac{1}{2} \left[2k_{ll} q_l + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n k_{lj} q_j \right] = \\ &= k_{ll} q_l + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n k_{lj} q_j = \sum_{j=1}^n k_{lj} q_j \end{aligned}$$

siendo lo anterior válido $\forall l = 1, \dots, n$.

Esto nos permite reescribir la ecuación 3.1.4 en la página 134 como:

$$m_{ii}\ddot{q}_i \approx - \sum_{j=1}^n k_{ij}q_j \quad \forall i = 1, \dots, n$$

La expresión anterior es equivalente a la del siguiente producto matricial:

$$M\ddot{Q} \approx -KQ$$

con lo que queda demostrado el enunciado. Q.E.D.

Corolario 22. *Sea un sistema de n grados de libertad sometido a pequeñas oscilaciones y sea V la función potencial asociada al sistema. Además, sean $\{q_i\}_{i=1}^n$ coordenadas generalizadas **ortonormales** para dicho sistema que cumplen $Q = \vec{0}$ en un punto de equilibrio del sistema. Entonces se satisface:*

$$\ddot{Q} \approx -KQ$$

donde $Q = (q_1, \dots, q_n) \Rightarrow \dot{Q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \Rightarrow \ddot{Q} = (\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_n)$ y $K = (k_{ij})_{i,j=1}^3$ viene dada por:

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} (Q = \vec{0}) \quad \forall i, j = 1, 2, 3$$

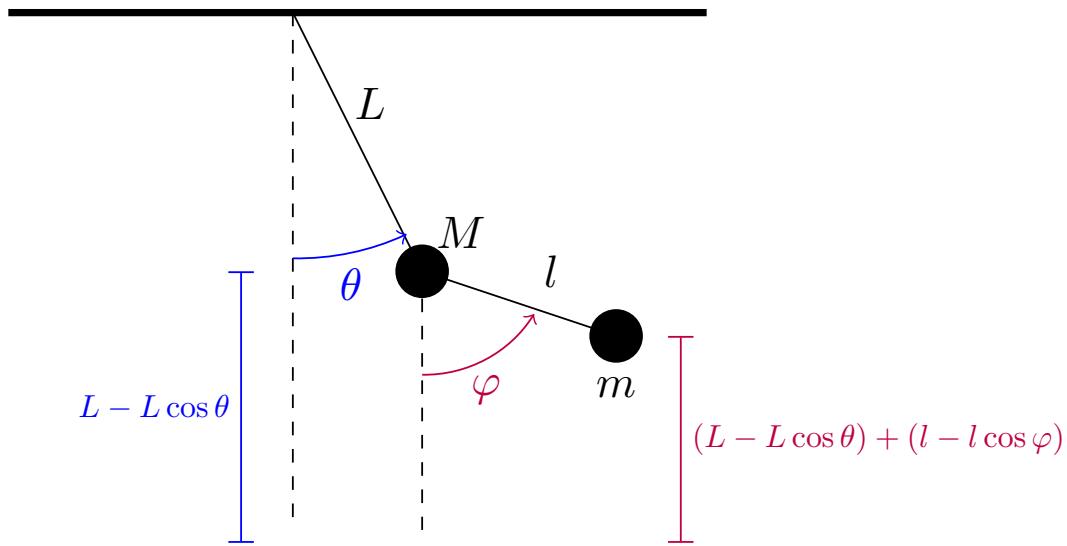
Nótese que este caso la matriz K es diferente de la expuesta en la proposición 35 en la página 134.

Demostración. Como las coordenadas $\{q_i\}_{i=1}^n$ son ortonormales, en particular son ortogonales. Así, por la proposición 35 en la página 134, obtenemos:

$$M\ddot{Q} \approx -KQ$$

Como $\{q_i\}_{i=1}^n$ son ortonormales, será $M = \mathbb{I}_n$, con lo que llegamos al enunciado. Q.E.D.

Ejemplo 20 (Ecuaciones del movimiento del péndulo doble).



Vamos a continuar con el trabajo realizado en el ejemplo 3.1.4 en la página 134.

Cogiendo el origen del potencial en el punto de equilibrio, la masa M asciende una altura $(L - L \cos \theta)$ y la masa m asciende $(L - L \cos \theta) + (l - l \cos \varphi)$. Así, tenemos:

$$V_M = MgL(1 - \cos \theta)$$

$$V_m = mgL(1 - \cos \theta) + mgl(1 - \cos \varphi)$$

En consecuencia es:

$$V = V_M + V_m = (M + m)gL(1 - \cos \theta) + mgl(1 - \cos \varphi)$$

Aproximando a segundo orden, obtenemos que:

$$\begin{aligned} V &\approx (M + m)gL\left(1 - \left[1 - \frac{\theta^2}{2}\right]\right) + mgl\left(1 - \left[1 - \frac{\varphi^2}{2}\right]\right) = \\ &= (M + m)gL\frac{\theta^2}{2} + mgl\frac{\varphi^2}{2} \end{aligned}$$

Vamos a partir de las coordenadas utilizadas en el ejemplo 19 en la página 132: $q_1 = \sqrt{ML}\theta$ y $q_2 = \sqrt{m}(L\theta + l\varphi)$, que son coordenadas generalizadas ortonormales. Despejando, obtenemos:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{q_1}{\sqrt{ML}} \\ q_2 = \sqrt{m}\left(\frac{q_1}{\sqrt{ML}} + l\varphi\right) &\Leftrightarrow q_2 - \sqrt{\frac{m}{M}}q_1 = \sqrt{ml}\varphi \Leftrightarrow \varphi = \frac{q_2 - \sqrt{\frac{m}{M}}q_1}{\sqrt{ml}} = \frac{\frac{q_2}{\sqrt{m}} - \frac{q_1}{\sqrt{M}}}{l} \end{aligned}$$

De esta forma, llegamos a:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}(M + m)gL\left(\frac{q_1}{\sqrt{ML}}\right)^2 + \frac{1}{2}mgl\left(\frac{\frac{q_2}{\sqrt{m}} - \frac{q_1}{\sqrt{M}}}{l}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{2}\frac{M + m}{M}\frac{g}{L}q_1^2 + \frac{1}{2}m\frac{g}{l}\left(\frac{q_2^2}{m} + \frac{q_1^2}{M} - \frac{2q_1q_2}{\sqrt{Mm}}\right) = \\ &= \frac{1}{2}(M + m)\frac{g}{ML}q_1^2 + \frac{1}{2}m\frac{g}{Ml}q_1^2 + \frac{1}{2}\frac{g}{l}q_2^2 - \frac{m}{\sqrt{Mm}}\frac{g}{l}q_1q_2 = \\ &= \frac{1}{2}\frac{g}{M}\left[\frac{M + m}{L} + \frac{m}{l}\right]q_1^2 + \frac{1}{2}\frac{g}{l}q_2^2 - \sqrt{\frac{m}{M}}\frac{g}{l}q_1q_2 \end{aligned}$$

Como V es un polinomio en dos variables de segundo grado, el desarrollo de Taylor de un polinomio de grado j a orden j coincide con sí mismo y las derivadas parciales de segundo orden de un polinomio de segundo grado con constantes, podemos «leer» el valor de las mencionadas parciales directamente de la expresión de V . Por consiguiente, tenemos:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\underbrace{\frac{g}{M}\left[\frac{M + m}{L} + \frac{m}{l}\right]}_{=k_{11}}q_1^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{g}{l}q_2^2}_{=k_{22}} - \underbrace{\sqrt{\frac{m}{M}}\frac{g}{l}q_1q_2}_{=k_{12}=k_{21}} \\ k_{11} &= \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} = \frac{g}{M}\left[\frac{M + m}{L} + \frac{m}{l}\right] \\ k_{22} &= \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} = \frac{g}{l}q_2^2 \\ k_{12} = k_{21} &= \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 q_2} = -\sqrt{\frac{m}{M}}\frac{g}{l} \end{aligned}$$

Por el corolario 22 en la página anterior, debe cumplirse:

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{g}{M}\left[\frac{M + m}{L} + \frac{m}{l}\right] & -\sqrt{\frac{m}{M}}\frac{g}{l} \\ -\sqrt{\frac{m}{M}}\frac{g}{l} & \frac{g}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Q.E.F.

3.2. Modos normales de oscilación

Teorema 8. *Sea un sistema de n grados de libertad sometido a pequeñas oscilaciones y sea V la función potencial asociada al sistema. Además, sean $\{q_i\}_{i=1}^n$ coordenadas generalizadas **ortogonales** para dicho sistema que cumplen $Q = (q_1, \dots, q_n) = \vec{0}$ en un punto de equilibrio **estable** del sistema. Consideremos las matrices K y M dadas en la proposición 35 en la página 134. Supondremos que la matriz M es definida positiva y llamaremos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a los valores propios de $M^{-1}K$ (no necesariamente distintos entre sí). Entonces, existen $\delta_i \in \mathbb{R}$ y $v_i \in V_{\lambda_i}(M^{-1}K)$ (donde con esto último denotamos el espacio propio de $M^{-1}K$ asociado al autovalor λ_i) $\forall i = 1, \dots, n$ tales que la solución general del movimiento del sistema puede aproximarse como:*

$$Q(t) \approx \sum_{i=1}^n \cos(\omega_i t + \delta_i) v_i$$

siendo $\omega_i = +\sqrt{\lambda_i}$ y siendo $\{v_i\}_{i=1}^n$ una base de vectores propios de $M^{-1}K$.

Demostración. Como el punto de equilibrio es estable, la función potencial V tendrá en $Q = \vec{0}$ un mínimo estricto local. En consecuencia, por nuestros conocimientos de análisis, sabemos que el hessiano de V será una matriz definida positiva. Por ende, todos sus autovalores serán positivos. Por otra parte, nótese que según la proposición 35 en la página 134 es:

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_n \partial q_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_n^2} \end{pmatrix} = HV$$

Es decir, K coincide justo con el hessiano de V . Por tanto, los autovalores de K serán todos positivos.

Como estamos en el caso de oscilaciones pequeñas, estamos en disposición de hacer uso de la proposición 35 en la página 134 y, en consecuencia, debe cumplirse $M\ddot{Q} \approx -KQ$. Nuestro objetivo es, ahora, resolver la ecuación diferencial anterior, que es lineal y de segundo orden. Para ello, primero debemos pasar la M al otro lado:

$$M\ddot{Q} \approx -KQ \Leftrightarrow \ddot{Q} = -M^{-1}KQ$$

Nótese que lo anterior está bien definido, dado que al ser M definida positiva por hipótesis, es invertible. En lo sucesivo llamaremos Y a la matriz $M^{-1}K$. Ahora, necesitamos pasar al sistema de primer orden equivalente. Con tal fin, definimos las variables:

$$x_i := q_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$x_{n+i} = \dot{q}_i \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow \dot{x}_{n+i} = \ddot{q}_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

De esta forma, el sistema de primer orden equivalente a la ecuación $\ddot{Q} \approx -KQ$ queda:

$$\begin{aligned} \dot{X} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{I}_n \\ \hline -Y & 0 \end{array} \right)}_{=:A} X &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \\ \dot{x}_{n+1} \\ \dot{x}_{n+2} \\ \vdots \\ \dot{x}_{2n-1} \\ \dot{x}_{2n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -y_{11} & -y_{12} & \cdots & -y_{1,n-1} & -y_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -y_{21} & -y_{22} & \cdots & -y_{2,n-1} & -y_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -y_{n-1,1} & -y_{n-1,2} & \cdots & -y_{n-1,n-1} & -y_{n-1,n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -y_{n1} & -y_{n2} & \cdots & -y_{n,n-1} & -y_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{2n-1} \\ x_{2n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para proseguir, debemos calcular los autovalores de la matriz A :

$$|A - \omega \mathbb{I}| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\omega \mathbb{I}_n & \mathbb{I}_n \\ -Y & -\omega \mathbb{I}_n \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \omega \mathbb{I}_n & \mathbb{I}_n \\ Y & -\omega \mathbb{I}_n \end{vmatrix} = 0$$

Multiplicamos cada columna $n + i$ -ésima por ω y se la restamos a la columna i -ésima, haciendo esto $\forall i = 1, \dots, n$. Dicho de otra forma, multiplicamos los bloques derechos de la matriz anterior por ω y se los restamos a los izquierdos. Como dicha operación no altera el determinante, obtenemos:

$$|A - \omega \mathbb{I}| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \omega \mathbb{I}_n - \omega \mathbb{I}_n & \mathbb{I}_n \\ Y + \omega^2 \mathbb{I}_n & -\omega \mathbb{I}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ Y + \omega^2 \mathbb{I}_n & -\omega \mathbb{I}_n \end{vmatrix} = 0$$

A continuación, expandimos el determinante anterior por la primera fila n veces hasta que la primera fila de la matriz sea la fila $n + 1$ -ésima. Es decir:

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ Y + \omega^2 \mathbb{I}_n & -\omega \mathbb{I}_n \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ y_{11} + \omega^2 & y_{12} & \cdots & y_{1,n-1} & y_{1n} & -\omega & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y_{21} & y_{22} + \omega^2 & \cdots & y_{2,n-1} & y_{2n} & 0 & -\omega & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{n-1,1} & y_{n-1,2} & \cdots & y_{n-1,n-1} + \omega^2 & y_{n-1,n} & 0 & 0 & \cdots & -\omega & 0 \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n,n-1} & y_{nn} + \omega^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\omega \end{vmatrix} = 0$$

$n \times n \quad n \times n$
 $n \times n \quad n \times n$

A continuación, expandimos el determinante anterior por la primera fila, obteniendo:

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ Y + \omega^2 \mathbb{I}_n & -\omega \mathbb{I}_n \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ y_{11} + \omega^2 & y_{12} & \cdots & y_{1,n-1} & y_{1n} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y_{21} & y_{22} + \omega^2 & \cdots & y_{2,n-1} & y_{2n} & -\omega & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{n-1,1} & y_{n-1,2} & \cdots & y_{n-1,n-1} + \omega^2 & y_{n-1,n} & 0 & \cdots & -\omega & 0 \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n,n-1} & y_{nn} + \omega^2 & 0 & \cdots & 0 & -\omega \end{vmatrix} = 0$$

$(n-1) \times n \quad (n-1) \times (n-1)$
 $n \times n \quad n \times (n-1)$

De nuevo, expandimos el determinante por la primera fila:

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ Y + \omega^2 \mathbb{I}_n & -\omega \mathbb{I}_n \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{cccccc|cc|cc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline y_{11} + \omega^2 & y_{12} & \cdots & \cdots & y_{1,n-1} & y_{1n} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y_{21} & y_{22} + \omega^2 & \cdots & \cdots & y_{2,n-1} & y_{2n} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & -\omega & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{n-1,1} & y_{n-1,2} & \cdots & \cdots & y_{n-1,n-1} + \omega^2 & y_{n-1,n} & 0 & \cdots & -\omega & 0 \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & \cdots & y_{n,n-1} & y_{nn} + \omega^2 & 0 & \cdots & 0 & -\omega \end{array} \right| = 0$$

$\underbrace{(n-2) \times n}_{n \times n} \quad \underbrace{(n-2) \times (n-2)}_{n \times (n-2)}$

Repetiendo este procedimiento n veces, llegamos a:

$$\left| \begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{I}_n \\ \hline Y + \omega^2 \mathbb{I}_n & -\omega \mathbb{I}_n \end{array} \right| = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{ccccc} y_{11} + \omega^2 & y_{12} & \cdots & y_{1,n-1} & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} + \omega^2 & \cdots & y_{2,n-1} & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{n-1,1} & y_{n-1,2} & \cdots & y_{n-1,n-1} + \omega^2 & y_{n-1,n} \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n,n-1} & y_{nn} + \omega^2 \end{array} \right|_{n \times n} = 0 \Leftrightarrow |Y + \omega^2 \mathbb{I}| = 0$$

donde debajo de cada matriz por cajas hemos indicado la dimensión de cada uno de sus bloques.

De esta forma, vemos que los valores propios de la matriz A son las raíces cuadradas de los opuestos de los autovalores de la matriz Y , pues éstos últimos vienen dados por la ecuación $|Y - \lambda \mathbb{I}| = 0$. Dicho de otra forma, por cada valor propio λ de la matriz Y , obtenemos dos valores propios $\omega = +\sqrt{-\lambda}$ y $\omega = -\sqrt{-\lambda}$ de la matriz A . Recordemos que anteriormente hemos argumentado que K era definida positiva. Como el producto de matrices definidas positivas es definida positiva y M^{-1} era definida positiva (por serlo M), tenemos que Y también será definida positiva; por ende, todos los autovalores de Y serán positivos; o sea, será siempre $\omega^2 < 0$. En consecuencia, los ω serán siempre números imaginarios puros. De hecho, sabemos que por cada valor propio λ de la matriz Y , $\omega = +i\sqrt{\lambda}$ y $\omega = -i\sqrt{\lambda}$ serán valores propios de A .

Nuestro objetivo ahora es ver que la matriz A es diagonalizable. Para ello, partimos de que sabemos que K es diagonalizable, ya que es simétrica. De esta forma, $Y = M^{-1}K$ también será diagonalizable. Por tanto, sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ con $r \leq n$ los autovalores distintos de la matriz Y ; entonces el polinomio mínimo de Y vendrá dado por:

$$P_{\min, Y}(Y) = \prod_{i=1}^r (Y - \lambda_i \mathbb{I}_n) \quad (3.2.1)$$

Es decir, aparecerá cada autovalor distinto sólo una vez. Ahora, estudiemos:

$$P = \prod_{i=1}^r (A - i\sqrt{\lambda_i} \mathbb{I}_{2n}) (A + i\sqrt{\lambda_i} \mathbb{I}_{2n}) = \prod_{i=1}^r (A^2 + \lambda_i \mathbb{I}_{2n}) \quad (3.2.2)$$

Ahora, calculemos cuánto vale A^2 :

$$A^2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{I}_n \\ \hline -Y & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{I}_n \\ \hline -Y & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} -Y & 0 \\ \hline 0 & -Y \end{array} \right) \quad (3.2.3)$$

De esta forma, sustituyendo en la ecuación 3.2.2 en la página anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 P &= \prod_{i=1}^r \left[\left(\begin{array}{c|c} -Y & 0 \\ \hline 0 & -Y \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} \lambda_i \mathbb{I}_n & 0 \\ \hline 0 & \lambda_i \mathbb{I}_n \end{array} \right) \right] = \prod_{i=1}^r \left(\begin{array}{c|c} Y - \lambda_i \mathbb{I}_n & 0 \\ \hline 0 & Y - \lambda_i \mathbb{I}_n \end{array} \right) = \\
 &= (-1)^r \prod_{i=1}^r \left(\begin{array}{c|c} Y - \lambda_i \mathbb{I}_n & 0 \\ \hline 0 & Y - \lambda_i \mathbb{I}_n \end{array} \right) = (-1)^r \left(\begin{array}{c|c} \prod_{i=1}^r [Y - \lambda_i \mathbb{I}_n] & 0 \\ \hline 0 & \prod_{i=1}^r [Y - \lambda_i \mathbb{I}_n] \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

donde la expresión $\prod_{i=1}^r [Y - \lambda_i \mathbb{I}_n]$ es justo el polinomio mínimo de Y (por la ecuación 3.2.1 en la página anterior) evaluado en Y , por lo que es nulo. Es decir, tenemos:

$$P = \prod_{i=1}^r (A - i\sqrt{\lambda_i} \mathbb{I}_{2n}) (A + i\sqrt{\lambda_i} \mathbb{I}_{2n}) = (0)$$

Por consiguiente, la expresión anterior interpretada como un polinomio en A es el polinomio mínimo de A . Como en el polinomio mínimo de A no hay ningún autovalor repetido, todos los factores del polinomio están presentes con multiplicidad uno y, por consiguiente, la matriz A es diagonalizable.

Aplicando nuestros conocimientos de ecuaciones diferenciales, obtenemos que la solución general de la ecuación $\dot{X} = AX$ viene dada por:

$$X(t) = \sum_{j=1}^{2r} e^{\omega_j t} v_j$$

donde $v_j \in V_{\omega_j}(A)$, ya que el número de autovalores distintos de A es el doble que el de Y . Podemos reescribir lo anterior como:

$$X(t) = \sum_{j=1}^r \left(e^{i\sqrt{\lambda_j} t} u_j + e^{-i\sqrt{\lambda_j} t} w_j \right) \quad (3.2.4)$$

donde $u_j \in V_{i\sqrt{\lambda_j}}(A)$ y $w_j \in V_{-i\sqrt{\lambda_j}}(A)$. Como $X(t) \in \mathbb{R} \ \forall t \in \mathbb{R}$ y las exponenciales correspondientes a autovalores distintos son linealmente independientes entre sí, cada uno de sus sumandos del sumatorio anterior debe ser real, es decir, debe darse:

$$\begin{aligned}
 e^{i\sqrt{\lambda_j} t} u_j + e^{-i\sqrt{\lambda_j} t} w_j &= \overline{e^{i\sqrt{\lambda_j} t} u_j + e^{-i\sqrt{\lambda_j} t} w_j} \quad \forall j = 1, \dots, 2r \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow e^{i\sqrt{\lambda_j} t} u_j + e^{-i\sqrt{\lambda_j} t} w_j &= e^{-i\sqrt{\lambda_j} t} \bar{u}_j + e^{i\sqrt{\lambda_j} t} \bar{w}_j \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{i\sqrt{\lambda_j} t} u_j = e^{i\sqrt{\lambda_j} t} \bar{w}_j \\ e^{-i\sqrt{\lambda_j} t} w_j = e^{-i\sqrt{\lambda_j} t} \bar{u}_j \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_j = \bar{w}_j \\ w_j = \bar{u}_j \end{cases}
 \end{aligned}$$

donde el último paso se debe a que las exponenciales son linealmente independientes entre sí, siendo válido el argumento anterior $\forall j = 1, \dots, r$.

Descompondremos u_j y w_j en su parte real y su parte compleja. En consecuencia, definimos:

$$a_j := u_j + \bar{u}_j \quad \forall j = 1, \dots, r$$

$$b_j := \frac{1}{i} (u_j - \bar{u}_j) \quad \forall j = 1, \dots, r$$

De esta forma, podemos expresar la solución dada en la ecuación 3.2.4 en la página anterior como:

$$\begin{aligned}
 X(t) &= \sum_{j=1}^r \left(e^{i\sqrt{\lambda_j}t} (a_j + ib_j) + e^{-i\sqrt{\lambda_j}t} (a_j - ib_j) \right) = \\
 &= \sum_{j=1}^r \left[a_j \left(e^{i\sqrt{\lambda_j}t} + e^{-i\sqrt{\lambda_j}t} \right) + ib_j \left(e^{i\sqrt{\lambda_j}t} - e^{-i\sqrt{\lambda_j}t} \right) \right] = \\
 &= \sum_{j=1}^r \left[2a_j \cos(\sqrt{\lambda_j}t) - 2b_j \sin(\sqrt{\lambda_j}t) \right]
 \end{aligned}$$

Bien, a continuación, veamos que $a_j, b_j \in \ker(A^2 + \lambda_j \mathbb{I}_{2n})$. Por definición de a_j y de b_j , ambos toman valores en $\ker(A - i\sqrt{\lambda_j} \mathbb{I}_{2n}) + \ker(A + i\sqrt{\lambda_j} \mathbb{I}_{2n})$ y es:

$$\begin{aligned}
 \ker(A - i\sqrt{\lambda_j} \mathbb{I}_{2n}) + \ker(A + i\sqrt{\lambda_j} \mathbb{I}_{2n}) &= \ker \left[(A - i\sqrt{\lambda_j} \mathbb{I}_{2n})(A + i\sqrt{\lambda_j} \mathbb{I}_{2n}) \right] = \\
 &= \ker[A^2 + \lambda_j \mathbb{I}_{2n}]
 \end{aligned}$$

Luego, efectivamente, $a_j, b_j \in \ker(A^2 + \lambda_j \mathbb{I}_{2n})$. Además, como era:

$$A^2 + \lambda_j \mathbb{I}_{2n} = \left(\begin{array}{c|c} -Y & 0 \\ \hline 0 & -Y \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} \lambda_j \mathbb{I}_n & 0 \\ \hline 0 & \lambda_j \mathbb{I}_n \end{array} \right) = - \left(\begin{array}{c|c} Y - \lambda_j \mathbb{I}_n & 0 \\ \hline 0 & Y - \lambda_j \mathbb{I}_n \end{array} \right)$$

por lo visto en la ecuación 3.2.3 en la página 140, necesariamente, tanto las primeras n componentes de a_j y b_j como sus últimas n componentes entendidas como vectores de \mathbb{R}^n son vectores propios de Y .

Muy bien, sabemos que la solución de $\ddot{Q} = -M^{-1}KQ$ vendrá dada por las primeras n componentes de la solución $X(t)$. Es decir, será:

$$Q(t) \approx \sum_{j=1}^r \left[2\alpha_j \cos(\sqrt{\lambda_j}t) - 2\beta_j \sin(\sqrt{\lambda_j}t) \right] \quad (3.2.5)$$

donde $\alpha_j = (a_{j,1}, \dots, a_{j,n})$ y $\beta_j = (b_{j,1}, \dots, b_{j,n})$. Por lo que acabamos de comentar en el párrafo anterior, sabemos que $\alpha_j, \beta_j \in V_{\lambda_j}(Y)$. Ahora mismo, tenemos la solución expresada como combinación lineal de senos y cosenos y queremos expresarla como combinación lineal de senos con desfase. Para ello, consideraremos el polinomio característico de Y : $P_Y(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$ siendo $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ los autovalores distintos de Y y m_1, \dots, m_r sus respectivas multiplicidades en el polinomio característico. Como Y es diagonalizable (por lo argumentado anteriormente), sabemos que el espacio propio asociado al autovalor λ_j tendrá dimensión m_j ; es decir, será $\dim V_{\lambda_j}(Y) = m_j$. En consecuencia, tomando una base para cada uno de los espacios propios de Y , podemos expresar α_j y β_j como:

$$\alpha_j = \sum_{k=1}^{m_j} y_{j,k} \mu_{j,k} \quad \forall j = 1, \dots, r$$

$$\beta_j = \sum_{k=1}^{m_j} z_{j,k} \mu_{j,k} \quad \forall j = 1, \dots, r$$

donde $y_{j,k}, z_{j,k} \in \mathbb{R}$ y $\{\mu_{j,k}\}_{k=1}^{m_j}$ forma una base de $V_{\lambda_j}(Y)$. Sustituyendo en la expresión 3.2.5, obtenemos:

$$Q(t) \approx \sum_{j=1}^r \left[2 \left(\sum_{k=1}^{m_j} y_{j,k} \mu_{j,k} \right) \cos(\sqrt{\lambda_j}t) - 2 \left(\sum_{k=1}^{m_j} z_{j,k} \mu_{j,k} \right) \sin(\sqrt{\lambda_j}t) \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{m_j} \underbrace{\left[2y_{j,k} \cos(\sqrt{\lambda_j}t) - 2z_{j,k} \sin(\sqrt{\lambda_j}t) \right]}_{\in \mathbb{R}} \mu_{j,k}$$

Ahora, podemos aplicar la equivalencia conocida entre la solución de una oscilación armónica expresada como combinación lineal de un seno y un coseno y la solución expresada como un coseno con un desfase. De esta manera, obtenemos que existen $B_{j,k}, \phi_{j,k} \in \mathbb{R} \ \forall k = 1, \dots, m_j \wedge \forall j = 1, \dots, r$ tales que:

$$Q(t) \approx \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{m_j} B_{j,k} \cos(\sqrt{\lambda_j}t + \phi_{j,k}) \mu_{j,k}$$

Como es necesariamente $\sum_{j=1}^r m_j = n$, podemos reescribir el doble sumatorio anterior en función de un único índice. De forma que la expresión anterior es equivalente a:

$$Q(t) \approx \sum_{i=1}^n \cos(\sqrt{\lambda_i}t + \delta_i) v_i$$

donde $v_i \in V_{\lambda_i}(Y)$ y los λ_i no son necesariamente distintos entre sí. Además, por construcción, los v_i forman una base de vectores propios de Y . Q.E.D.

Corolario 23. *Sea un sistema de n grados de libertad sometido a pequeñas oscilaciones y sea V la función potencial asociada al sistema. Además, sean $\{q_i\}_{i=1}^n$ coordenadas generalizadas ortonormales para dicho sistema que cumplen $Q = (q_1, \dots, q_n) = \vec{0}$ en un punto de equilibrio estable del sistema. Consideremos la matriz K dada en el corolario 22 en la página 136 y llamemos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a los valores propios de K (no necesariamente distintos entre sí). Entonces, existen $\delta_i \in \mathbb{R}$ y $v_i \in V_{\lambda_i}(K)$ (donde con esto último denotamos el espacio propio de K asociado al autovalor λ_i) $\forall i = 1, \dots, n$ tales que la solución general del movimiento del sistema puede aproximarse como:*

$$Q(t) \approx \sum_{i=1}^n \cos(\omega_i t + \delta_i) v_i$$

siendo $\omega_i = +\sqrt{\lambda_i}$, siendo $\{v_i\}_{i=1}^n$ una base de vectores propios de K .

Demostración. El resultado se obtiene trivialmente al aplicar el teorema 8 en la página 138 tomando $M = \mathbb{I}_n$ ya que las coordenadas $\{q_i\}_{i=1}^n$ son ortonormales. Q.E.D.

Definición 28. Cada uno de los sumandos que aparecen en el sumatorio de la expresión de $Q(t)$ dada en el teorema 8 en la página 138 reciben el nombre de **modo**.

Observación 30. Cuando en la expresión de la ecuación dada en el teorema 8 en la página 138 todos los sumandos son nulos menos un modo, entonces las coordenadas q_1, \dots, q_n oscilan con la misma frecuencia, aunque no necesariamente con las mismas amplitudes.

Como la solución general es una combinación arbitraria de modos (según expuesto en el teorema 8 en la página 138), estudiar el comportamiento del sistema dado por cada modo resulta útil para entender el funcionamiento del sistema en su totalidad.

Proposición 36 (Ecuación de amplitudes). *Consideramos un modo (el j -ésimo) de los que aparecen en la expresión de $Q(t)$ en el teorema 8 en la página 138:*

$$Q_j(t) \approx \cos(\omega t + \delta) v$$

donde $v \in V_{\omega^2}(K)$. Consideremos $v = (A_1, \dots, A_n)$, de forma que A_i es la amplitud de oscilación de la coordenada q_i . Entonces se cumple la ecuación:

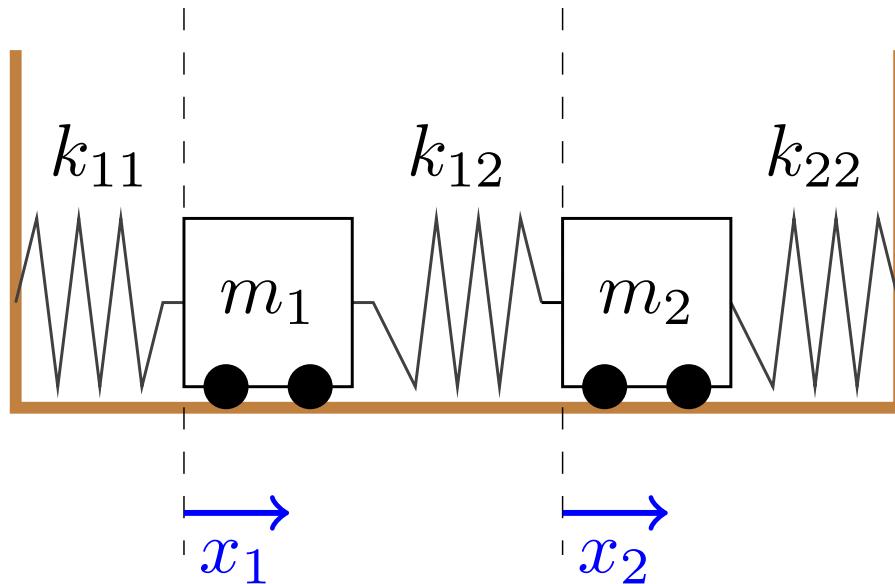
$$\omega^2 A_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} A_j$$

Demostración. Como v es un vector propio de K asociado al valor propio ω^2 , debe ser:

$$Kv = \omega^2 v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \omega^2 A_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} A_j$$

Q.E.D.

Ejemplo 21. Tenemos dos partículas iguales de masa m , sin rozamiento, acopladas con tres muelles iguales entre sí con constante k como se muestra en la figura:



Nuestra intención va a ser aplicar el corolario 23 en la página anterior. Para ello, primero tenemos que hallar unas coordenadas ortonormales con las que describir nuestro sistema. Con tal fin, debemos estudiar la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

Por la definición 25 en la página 128, las coordenadas $\{x_1, x_2\}$ ya son ortogonales, por tanto, únicamente tenemos que normalizarlas:

$$q_1 := \sqrt{m}x_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{q_1}{\sqrt{m}}, \quad q_2 := \sqrt{m}x_2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{q_2}{\sqrt{m}} \quad (3.2.6)$$

De esta forma, podemos expresar la energía cinética como:

$$T = \frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}q_2^2$$

A continuación, vamos con la energía potencial:

$$V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$$

En función de las coordenadas q_1 y q_2 , el potencial queda:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \frac{k}{m} q_1^2 + \frac{1}{2} k \left(\frac{q_2}{\sqrt{m}} - \frac{q_1}{\sqrt{m}} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{m} q_2^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{k}{m} q_1^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{m} (q_2 - q_1)^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{m} q_2^2 \end{aligned}$$

Como V ya es un polinomio de segundo grado, no necesitaríamos hallar las parciales para obtener la matriz K . Sin embargo, para evitarnos el trabajo de expandir los cuadrados y juntar los términos, vamos a derivar en su lugar. De esta manera:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} = \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{k}{m} q_1 + \frac{k}{m} (q_2 - q_1) (-1) \right] = \frac{k}{m} + \frac{k}{m} = \frac{2k}{m} \\ k_{22} &= \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} = \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{k}{m} q_1 + \frac{k}{m} (q_2 - q_1) \right] = \frac{k}{m} + \frac{k}{m} = \frac{2k}{m} \\ k_{12} &= k_{21} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{k}{m} (q_2 - q_1) \right] = -\frac{k}{m} \end{aligned}$$

De esta forma, la matriz K queda:

$$K = \begin{pmatrix} \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} \end{pmatrix}$$

Ahora debemos hallar los autovalores de la matriz K :

$$\begin{aligned} |K - \omega^2 \mathbb{I}| &= 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{2k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2k}{m} - \omega^2 \right)^2 - \left(\frac{k}{m} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2k}{m} - \omega^2 - \frac{k}{m} \right) \left(\frac{2k}{m} - \omega^2 + \frac{k}{m} \right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) \left(\frac{3k}{m} - \omega^2 \right) = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = \begin{cases} \frac{k}{m} \\ \frac{3k}{m} \end{cases} \end{aligned}$$

De donde obtenemos que las frecuencias de oscilación son:

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \end{cases}$$

A continuación, debemos hallar una base de vectores propios. Para el valor propio $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$, tenemos:

$$\left(K - \frac{k}{m} \mathbb{I}_2 \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{k}{m}a - \frac{k}{m}b = 0 \\ -\frac{k}{m}a + \frac{k}{m}b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

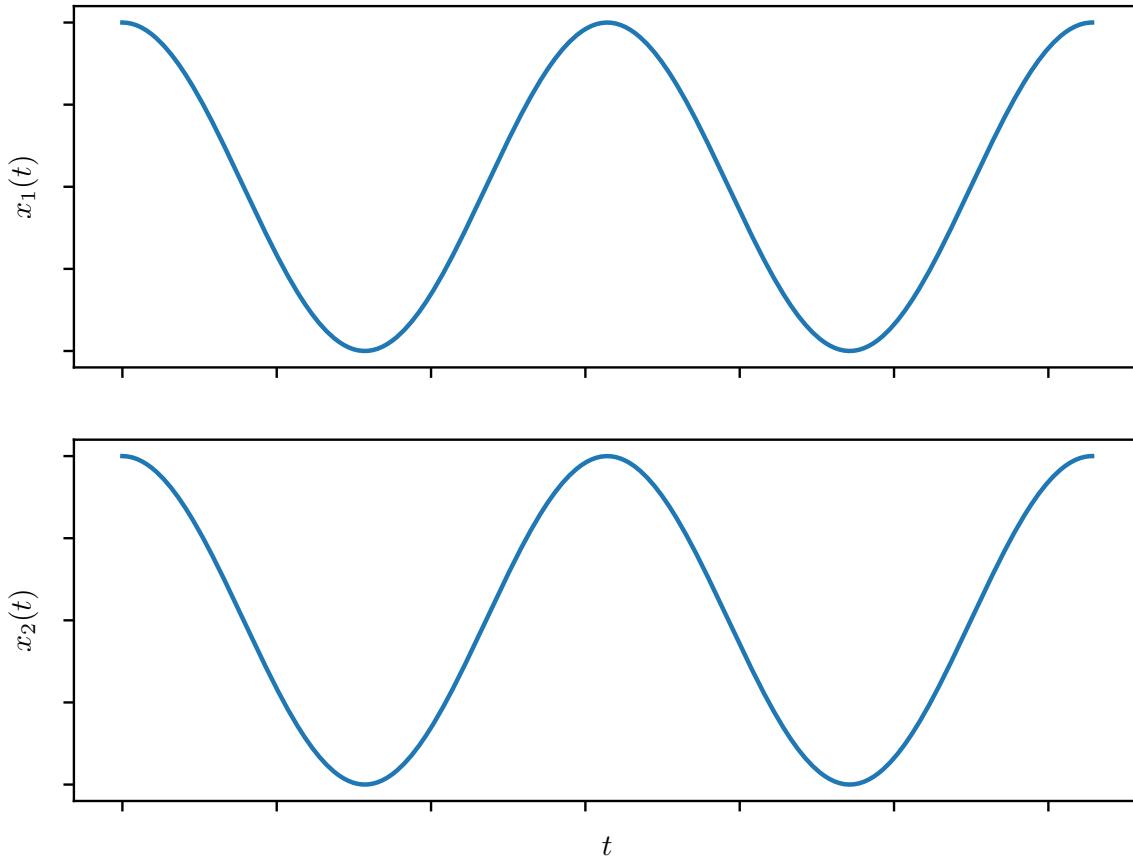
De esta forma, aplicando el corolario 23 en la página 143, obtenemos el primer modo:

$$Q_1(t) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \delta_1)$$

donde $A_1, \delta_1 \in \mathbb{R}$. Así, q_1 y q_2 oscilan en fase. Haciendo el cambio de vuelta a las coordenadas $\{x_1, x_2\}$ según dado en la ecuación 3.2.6 en la página 144, obtenemos:

$$X_1(t) = \underbrace{\frac{A_1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:B_1} \cos(\omega_1 t + \delta_1) = B_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \delta_1)$$

Este modo recibe el nombre de modo simétrico.



Actuemos de forma análoga para obtener el segundo modo, el correspondiente al valor propio $\omega_2^2 = \frac{3k}{m}$.

$$\left(K - \frac{3k}{m} \mathbb{I}_2 \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{k}{m}a + \frac{k}{m}b = 0 \\ +\frac{k}{m}a + \frac{k}{m}b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix} \forall \beta \in \mathbb{C}$$

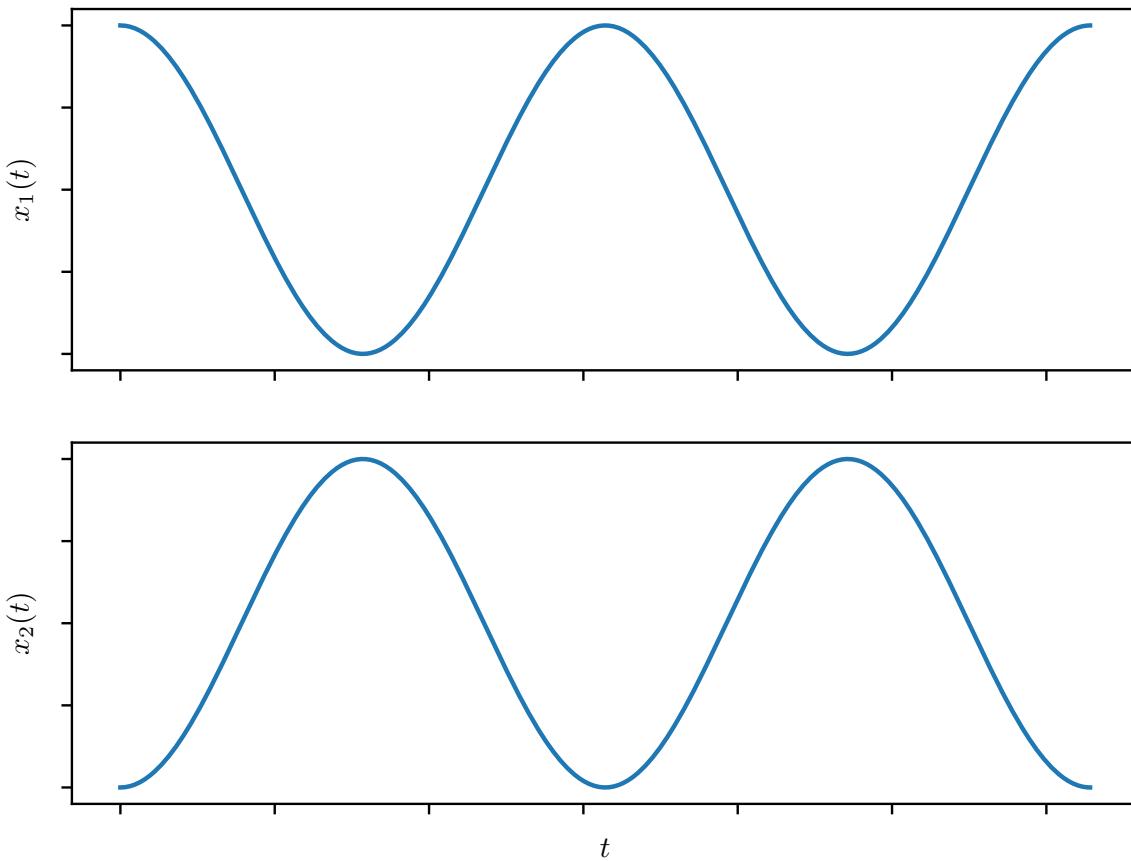
Aplicando el corolario 23 en la página 143, obtenemos el segundo modo:

$$Q_2(t) = A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \delta_2)$$

donde $A_2, \delta_2 \in \mathbb{R}$. Así, q_1 y q_2 oscilan en desfase. Haciendo el cambio de vuelta a las coordenadas $\{x_1, x_2\}$ según dado en la ecuación 3.2.6 en la página 144, obtenemos:

$$X_2(t) = \underbrace{\frac{A_2}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=:B_2} \cos(\omega_2 t + \delta_2) = B_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \delta_2)$$

Este modo recibe el nombre de modo antisimétrico.



Así, tenemos dos soluciones (dos modos normales):

$$X_1(t) = B_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \delta_1)$$

$$X_2(t) = B_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \delta_2)$$

Por ende, la solución general, según el corolario 23 en la página 143, vendrá dada por:

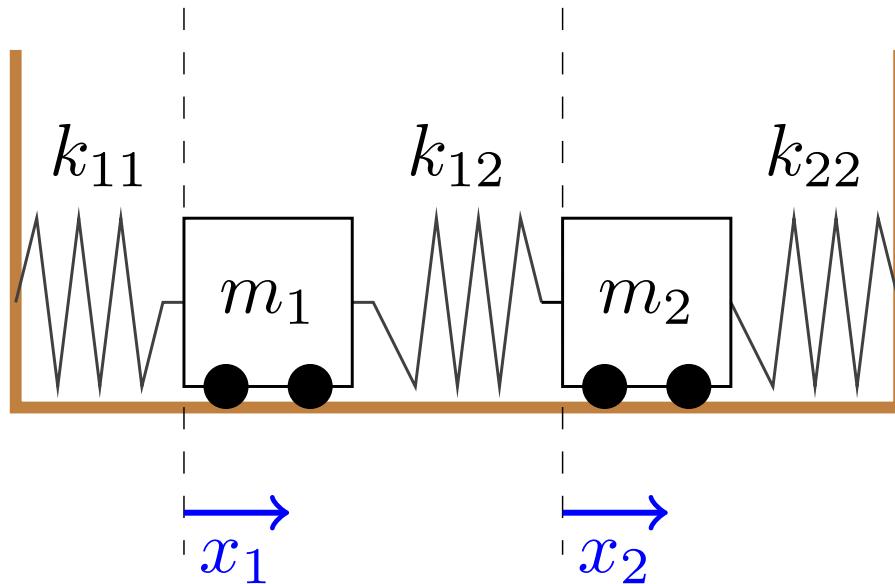
$$\begin{aligned} X(t) &= X_1(t) + X_2(t) = \\ &= B_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \delta_1) + B_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \delta_2) \end{aligned}$$

siendo $B_1, B_2, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales.

Q.E.D.

3.3. Osciladores débilmente acoplados

Muchas veces en física nos encontraremos con un sistema formado por dos partículas oscilantes que están débilmente acopladas. Por ejemplo, dos partículas sometidas a fuerzas de Van der Waals cumplen esta condición. Para visualizar esto, podemos imaginarnos un sistema con dos masas m y tres muelles de constantes $k_1 = k = k_2$ y $k_{12} \ll k$.



Por la segunda ley de Newton, obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k_{12}(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k_{12}(-x_1 + x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 = -(k + k_{12})x_1 + k_{12}x_2 \\ m\ddot{x}_2 = -(k + k_{12})x_2 + k_{12}x_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M\ddot{X} = - \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix} X$$

donde $M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$. Por analogía con la expresión dada por la proposición 35 en la página 134, debe ser:

$$K = \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix}$$

Por el teorema 8 en la página 138, para hallar las frecuencias de oscilación del sistema, debemos hallar los valores propios de la matriz $Y = M^{-1}K$:

$$Y = M^{-1}K = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix}$$

De forma que los valores propios de Y serán los mismos que los de K pero multiplicados por $\frac{1}{m}$. Así:

$$\begin{aligned} |K - \lambda \mathbb{I}| = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} k + k_{12} - \lambda & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (k + k_{12} - \lambda)^2 - k_{12}^2 = 0 \Leftrightarrow (k + k_{12} - \lambda - k_{12})(k + k_{12} - \lambda + k_{12}) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (k - \lambda)(k + 2k_{12} - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \begin{cases} k \\ k + 2k_{12} \end{cases} \end{aligned}$$

De esta forma, los valores propios de Y serán:

$$\omega^2 = \begin{cases} \frac{k}{m} \\ \frac{k + 2k_{12}}{m} \end{cases}$$

Por consiguiente, las frecuencias de oscilación quedan:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}}$$

donde ω_1 se corresponde con el modo simétrico y ω_2 se corresponde con el modo antisimétrico (como veremos ahora). Como $k_{12} \ll k$, tenemos que ω_1 y ω_2 serán muy parecidas. Esto motiva que trabajemos con la frecuencia central ω_0 :

$$\omega_0 := \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

Ahora, expresaremos las frecuencias ω_1 y ω_2 en función de ω_0 . Para ello, sabemos que debe existir $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\omega_1 = \omega_0 - \varepsilon, \quad \omega_2 = \omega_0 + \varepsilon$$

A continuación, para poder hallar los modos, según el teorema 8 en la página 138, debemos encontrar una base de vectores propios de $Y = M^{-1}K$. En nuestro caso, los vectores propios de Y también serán vectores propios de K y viceversa; luego podemos simplemente hallar los autovectores de K :

$$\begin{aligned} (K - k \mathbb{I}) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (0) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} k_{12}a - k_{12}b = 0 \\ -k_{12}a + k_{12}b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} (K - (k + 2k_{12}) \mathbb{I}) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (0) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & -k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -k_{12}a - k_{12}b = 0 \\ -k_{12}a - k_{12}b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con $\beta \in \mathbb{C}$.

De esta forma, aplicando el teorema 8 en la página 138, obtenemos que los modos serán:

$$X_1(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos [(\omega_0 - \varepsilon)t + \delta_1]$$

$$X_2(t) = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos [(\omega_0 + \varepsilon) t + \delta_2]$$

con $C_1, C_2, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$. Por el teorema 8 en la página 138, la solución general queda de la forma:

$$\begin{aligned} X(t) &= X_1(t) + X_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos [(\omega_0 - \varepsilon) t + \delta_1] + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos [(\omega_0 + \varepsilon) t + \delta_2] = \\ &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos (\omega_0 t + \delta_1 - \varepsilon t) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos (\omega_0 t + \delta_2 + \varepsilon t) \end{aligned}$$

Supondremos nulo el desfase inicial $\delta_1 = 0 = \delta_2$:

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos (\omega_0 t - \varepsilon t) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos (\omega_0 t + \varepsilon t)$$

Por la fórmula del coseno de la suma $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, obtenemos:

$$\begin{aligned} X(t) &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} [\cos(\omega_0 t) \cos(-\varepsilon t) - \sin(\omega_0 t) \sin(-\varepsilon t)] + \\ &\quad + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} [\cos(\omega_0 t) \cos(\varepsilon t) - \sin(\omega_0 t) \sin(\varepsilon t)] = \\ X(t) &= \begin{pmatrix} C_1 [\cos(\omega_0 t) \cos(\varepsilon t) + \sin(\omega_0 t) \sin(\varepsilon t) + \cos(\omega_0 t) \cos(-\varepsilon t) - \sin(\omega_0 t) \sin(-\varepsilon t)] \\ C_2 [\cos(\omega_0 t) \cos(-\varepsilon t) + \sin(\omega_0 t) \sin(\varepsilon t) - \cos(\omega_0 t) \cos(\varepsilon t) + \sin(\omega_0 t) \sin(\varepsilon t)] \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2C_1 \cos(\omega_0 t) \cos(\varepsilon t) \\ 2C_2 \sin(\omega_0 t) \sin(\varepsilon t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora, supondremos $C_1 = C_2$ y llamaremos $A := 2C_1 = 2C_2$. De esta forma, podemos expresar la solución como:

$$X(t) = A \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) \cos(\varepsilon t) \\ \sin(\omega_0 t) \sin(\varepsilon t) \end{pmatrix}$$

Notemos que es $\varepsilon \ll \omega_0$. Esto hace que nuestra solución pueda entenderse como una oscilación rápida (el término con ω_0) cuya amplitud está modulada por una oscilación lenta (los términos con ε).

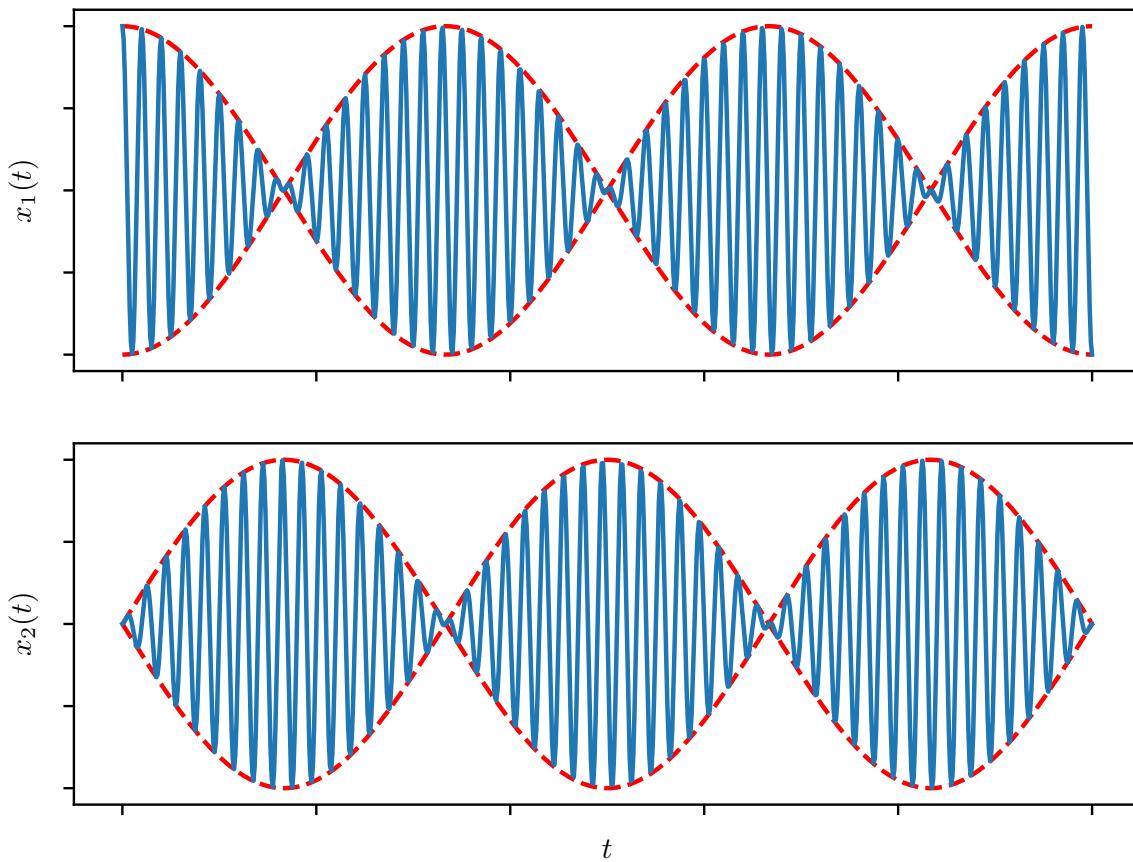
Ahora vamos a suponer que en $t = 0$ se da $x_1 = A$ y $x_2 = 0$ con $\dot{x}_1 = 0$ y $\dot{x}_2 = 0$. Para t muy pequeños, va a ser aproximadamente:

$$x_1(t) \approx A \cos(\omega_0 t), \quad x_2(t) \approx 0$$

Luego, en $t \approx \frac{\pi}{2\varepsilon}$ se dará:

$$x_1(t) \approx 0, \quad x_2(t) \approx A \sin(\omega_0 t)$$

Es decir, ambos osciladores se están transfiriendo la energía de uno a otro, de manera que uno permanece estático mientras el otro oscila. Veamos las gráficas de $x_1(t)$ y $x_2(t)$:



Puede verse una animación al respecto en el siguiente vídeo¹.

3.4. Propiedades para la base de autovectores

Proposición 37. *Sea un sistema de n grados de libertad sometido a pequeñas oscilaciones y sea V la función potencial asociada al sistema. Además, sean $\{q_i\}_{i=1}^n$ coordenadas generalizadas ortonormales para dicho sistema que cumplen $Q = \vec{0}$ en un punto de equilibrio estable del sistema. Si existe una base de vectores propios de K (donde consideramos K la matriz dada en el corolario 22 en la página 136) que sea ortonormal, entonces las coordenadas generalizadas $\{c_i\}_{i=1}^n$ dadas por $C = PQ$ (donde P es la matriz del cambio entre la base canónica y la base que en la que K es diagonal) son ortonormales; es decir, satisfacen:*

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \dot{c}_i^2$$

¹<https://www.youtube.com/watch?v=LwKNaFmNjAo>

Además, para estas coordenadas $\{c_i\}_{i=1}^n$ los modos se corresponden con la oscilación armónica de una y sólo una de las coordenadas c_j . Es decir, el modo j -ésimo viene dado por:

$$C_j(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a \cos(\omega t + \delta) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde $a, \delta \in \mathbb{R}$ y ω^2 es un valor propio de K .

Por otra parte, en función de las coordenadas $\{c_i\}_{i=1}^n$, la energía potencial adopta la forma:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 c_i^2$$

donde $\omega_1^2, \dots, \omega_n^2$ son los valores propios de la matriz K , es decir, los cuadrados de las frecuencias de oscilación.

Por último, el lagrangiano del sistema expresado en función de las coordenadas $\{c_i\}_{i=1}^n$ es separable en n lagrangianos independientes.

Demostración. Como las coordenadas $\{q_i\}_{i=1}^n$ son ortonormales, por la definición 26 en la página 132, podemos expresar la energía cinética como:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \dot{q}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 = \frac{1}{2} \langle \dot{Q}, \dot{Q} \rangle$$

donde con $\langle \rangle$ denotamos producto escalar. Por otra parte, por conocimientos de álgebra lineal es:

$$C = PQ \Leftrightarrow Q = P^{-1}C \Rightarrow \dot{Q} = P^{-1}\dot{C}$$

Sustituyendo en la expresión para T , tenemos:

$$T = \frac{1}{2} \langle P^{-1}\dot{C}, P^{-1}\dot{C} \rangle$$

Si la base de vectores propios es ortonormal (respecto al producto escalar canónico), entonces, sabemos que el cambio de base entre la base de vectores propios de K y la base canónica vendrá dado por una matriz ortogonal, por lo que P^{-1} será ortogonal. Ahora, recordemos que una matriz ortogonal no es más que la representación coordenada de una isometría y una isometría preserva el producto escalar. Por consiguiente, será:

$$T = \frac{1}{2} \langle P^{-1}\dot{C}, P^{-1}\dot{C} \rangle = \frac{1}{2} \langle \dot{C}, \dot{C} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{c}_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \dot{c}_i^2$$

Y, por la definición 26 en la página 132, las coordenadas $\{c_i\}_{i=1}^n$ son ortonormales.

Consideremos ahora, el modo j -ésimo de oscilación. Por la definición 28 en la página 143 y el corolario 23 en la página 143, sabemos que dicho modo puede expresarse como:

$$Q_j(t) = \cos(\omega t + \delta) v$$

donde ω^2 es un autovalor de K , $\delta \in \mathbb{R}$ y $v \in V_{\omega^2}(K)$. Para pasar a las coordenadas $\{c_i\}_{i=1}^n$ debemos multiplicar la expresión anterior por P (ya que P era la matriz del cambio entre la base canónica (la de las $\{q_i\}_{i=1}^n$) y la base en la que K es diagonal):

$$C_j(t) = PQ_j(t) = P \cos(\omega t + \delta) v = \cos(\omega t + \delta) Pv$$

Como estamos considerando el modo j -ésimo, v será proporcional al vector j -ésimo de la base de vectores propios de K ; llamaremos $a \in \mathbb{R}$ a dicha constante de proporcionalidad. De esta forma, en su base de autovectores, v debe ser proporcional al vector j -ésimo de la base canónica con constante de proporcionalidad a . Ahora bien, dado que Pv es justo la expresión de v en base de vectores propios, tenemos:

$$C_j(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a \cos(\omega t + \delta) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vamos con la energía potencial V . Como estamos en el caso de pequeñas oscilaciones, estamos tomando la función energía potencial como un polinomio de Taylor de segundo grado, cuyos términos lineales y constantes son nulos. Por consiguiente, es:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial c_i \partial c_j} c_i c_j$$

Por otra parte, recordando la definición de la matriz K dada en el corolario 22 en la página 136, podemos expresar la energía potencial V como:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} c_i c_j$$

Como K es diagonal en la base en la que están expresadas las $\{c_i\}_{i=1}^n$, llegamos a:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_{ii} c_i^2$$

En base diagonal, necesariamente los k_{ii} son los autovalores de K . Por consiguiente:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 c_i^2$$

Por último consideremos el lagrangiano del sistema. Por lo argumentado antes, sabemos que será:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \dot{c}_i^2$$

De esta forma, el lagrangiano queda:

$$\mathcal{L} = T - V = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \dot{c}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 c_i^2 = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\frac{1}{2} \dot{c}_i^2 - \frac{1}{2} \omega_i^2 c_i^2 \right)}_{=: \mathcal{L}_i} = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i$$

donde cada $\mathcal{L}_i = \mathfrak{F}(c_i, \dot{c}_i)$. Es decir, hemos obtenido n lagragianos independientes unos de otros. Q.E.D.

Observación 31. Un condición suficiente aunque no necesaria para que se satisfagan las hipótesis de la proposición 37 en la página 151 es los valores propios de K sean todos distintos entre sí. Ya que, en ese caso, al ser la matriz K simétrica, sabemos que autovalores distintos se corresponden con vectores propios que son ortogonales entre sí. Y, si todos los valores propios son distintos entre sí, entonces todos los vectores propios

serán ortogonales entre sí y, por consiguiente, la base de vectores propios de K será ortogonal. Una vez tenemos una base ortogonal, resulta trivial obtener una base ortonormal.

En particular, si consideramos un sistema con dos grados de libertad y coordenadas generalizadas $\{x_1, x_2\}$ acopladas, por la solución del problema de dos cuerpos, sabemos que las coordenadas $x_1 + x_2$ y $x_1 - x_2$ transforman el problema en dos problemas de una partícula. La proposición 37 en la página 151 es una generalización del problema de dos cuerpos para el caso de oscilaciones pequeñas.

Ejemplo 22. Vamos a dar un ejemplo de la aplicación de la proposición 37 en la página 151.

Tenemos un sistema con 2 masas iguales m y 3 muelles de constante k . Por la segunda ley de Newton, obtenemos las ecuaciones del movimiento:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2 \\ m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2 \end{cases}$$

Sumando y restando las ecuaciones anteriores (como se hace con el problema de dos cuerpos), llegamos a:

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = (k - 2k)x_1 + (k - 2k)x_2 = -k(x_1 + x_2)$$

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = (-2k - k)x_1 + (k + 2k)x_2 = -3k(x_1 - x_2)$$

Definimos las coordenadas:

$$q_1 := \frac{1}{2m}(x_1 + x_2)$$

$$q_2 := \frac{1}{2m}(x_1 - x_2)$$

En función de estas, las ecuaciones del movimiento quedan:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -\frac{k}{m}q_1 \\ \ddot{q}_2 = -\frac{3k}{m}q_2 \end{cases}$$

Comparando la expresión anterior con la dada en el corolario 22 en la página 136, deducimos que:

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} = -\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & \frac{3k}{m} \end{pmatrix}}_{=K} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz K es diagonal en la base en la que se expresan $\{q_1, q_2\}$. Según lo explicado en la proposición 37 en la página 151, la diagonal de la matriz K deben ser los cuadrados de las frecuencias de oscilación; de donde deducimos:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

También por la proposición 37 en la página 151, deducimos que $(q_1(t), 0)$ y $(0, q_2(t))$ son los modos de oscilación expresados en base de autovectores. Es más, por definición de $q_1(t)$ y $q_2(t)$ se da:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(q_1(t) + q_2(t)) \\ \frac{1}{2}(q_1(t) - q_2(t)) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} q_1(t) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} q_2(t)$$

Por el corolario 23 en la página 143, deducimos que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ son vectores propios de K expresados en base canónica que forman una base de vectores propios de K .

Por último consideremos el lagrangiano:

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2}\frac{k}{m}q_1^2 + \frac{1}{2}\frac{3k}{m}q_2^2 = \frac{1}{2}\omega_1^2q_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2q_2^2$$

De forma que el lagrangiano queda:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - \frac{1}{2}\omega_1^2q_1^2 - \frac{1}{2}\omega_2^2q_2^2 = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 - \omega_1^2q_1^2) + \frac{1}{2}(\dot{q}_2^2 - \omega_2^2q_2^2)$$

Por lo que el lagrangiano es separable en dos lagrangianos correspondientes a dos osciladores armónicos sin ningún término de acople. De esta forma, hemos comprobado para $n = 2$, lo que ya conocíamos para el caso general segúnd dado por la proposición 37 en la página 151.

3.5. Problemas

Ejercicio 15 (Problema 3.3). Una masa m cuelga de un muelle de constante elástica k y masa despreciable y, de ella, otro muelle y masa idénticos a los primeros. Calcula el *lagrangiano* del sistema, utilizando como coordenadas generalizadas los desplazamientos verticales de las masas, respecto a la posición que tienen cuando los muelles están sin estirar. Obtén la posición de equilibrio y las frecuencias y los modos normales de las oscilaciones verticales.

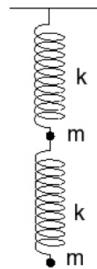


Figura 3.1: Sistema del problema

Solución. Comencemos definiendo como x_1 a la posición de la partícula más cercana al punto de anclaje y x_2 a la otra, segúnd esto, es facil ver que:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

$$V = -mgx_1 - mg(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}k(x_1 - l_0)^2 + \frac{1}{2}k[x_2 - (x_1 + l_0)]^2$$

Podemos definir unas nuevas coordenadas que simplificarán las anteriores expresiones:

$$q_i \equiv \sqrt{m}x_i \quad i = 1, 2$$

Así pues, las expresiones para la energía cinética y potencial tendrán las siguientes formas:

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2$$

$$V = -\sqrt{m}g(q_1 + q_2) + \frac{k}{2} \left[\left(\frac{q_1}{\sqrt{m}} - l_0 \right)^2 + \left(\frac{q_2 - q_1}{\sqrt{m}} - l_0 \right)^2 \right]$$

Por lo tanto, el *lagrangiano* del sistema tendrá una expresión:

$$\mathcal{L} = T - V$$

Podemos ahora emplear las ecuaciones de *Euler-Lagrange* $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$ para encontrar las ecuaciones del movimiento del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \ddot{q}_i \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} &= -\sqrt{m}g + \frac{k}{2} \left[2 \left(\frac{q_1}{\sqrt{m}} - l_0 \right) \frac{1}{\sqrt{m}} - 2 \left(\frac{q_2 - q_1}{\sqrt{m}} - l_0 \right) \frac{1}{\sqrt{m}} \right] = \\ &= \frac{k}{m} \left(2q_1 - q_2 - \frac{m\sqrt{m}g}{k} \right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} &= -\sqrt{m}g + \frac{k}{2} \left[2 \left(\frac{q_2 - q_1}{\sqrt{m}} - l_0 \right) \frac{1}{\sqrt{m}} \right] = \frac{k}{m} \left(q_2 - q_1 - \sqrt{m}l_0 - \frac{m\sqrt{m}g}{k} \right) \\ \therefore \begin{cases} \ddot{q}_1 = \frac{k}{m} \left(2q_1 - q_2 - \frac{m\sqrt{m}g}{k} \right) \\ \ddot{q}_2 = \frac{k}{m} \left(q_2 - q_1 - \sqrt{m}l_0 - \frac{m\sqrt{m}g}{k} \right) \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos nuevamente hacer un cambio de coordenadas que simplifiquen estas expresiones (haciendo que no tengan términos constantes), este cambio de variables será pues, una traslación:

$$q'_1 \equiv q_1 + a \quad q'_2 \equiv q_2 + b$$

con a, b constantes que cumplirán:

$$\begin{cases} 2a - b = -\frac{m\sqrt{m}g}{k} \\ -a + b = -\sqrt{m}l_0 - \frac{m\sqrt{m}g}{k} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\sqrt{m} \left(l_0 + \frac{2mg}{k} \right) \\ b = -\sqrt{m} \left(2l_0 + \frac{3mg}{k} \right) \end{cases}$$

Así pues, las ecuaciones del movimiento serán:

$$\boxed{\ddot{q}'_1 = \frac{k}{m} (2q'_1 - q'_2) \quad \ddot{q}'_2 = \frac{k}{m} (q'_2 - q'_1)}$$

Las posiciones de equilibrio del sistema se darán cuando $\ddot{q}'_1 = \ddot{q}'_2 = 0$, lo cual deja el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = \frac{k}{m} (2q'_1 - q'_2) \\ 0 = \frac{k}{m} (q'_2 - q'_1) \end{cases} \rightarrow q'_1 = q'_2 = 0$$

Ahora bien, puesto que por definición $q'_1 = q_1 + a$ y $q'_2 = q_2 + b$ tendremos que las posiciones de equilibrio serán:

$$\boxed{q_1|_{equilibrio} = -a = \sqrt{m} \left(l_0 + \frac{2mg}{k} \right) \quad q_2|_{equilibrio} = -b = \sqrt{m} \left(2l_0 + \frac{3mg}{k} \right)}$$

Podemos expresar las ecuaciones del movimiento en forma matricial, de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}'_1 \\ \ddot{q}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{pmatrix}$$

Sabemos por teoría que las frecuencias normales de oscilación del sistema se obtendrán como la solución de:

$$\det(K - \omega^2 \mathbb{I}) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \frac{2k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right) \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) - \left(-\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \rightarrow 2\frac{k^2}{m^2} - \omega^2\frac{2k}{m} - \omega^2\frac{k}{m} + \omega^4 - \frac{k^2}{m^2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \omega^4 - \omega^2\frac{3k}{m} + \frac{k^2}{m^2} = 0 \rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}}$$

Así pues, las dos frecuencias normales del sistema serán:

$$\omega_1^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m} \quad \omega_2^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}$$

Podemos ahora comenzar a calcular los modos normales de oscilación. Comenzando con el modo relacionado con ω_1 :

$$\begin{pmatrix} \frac{2k}{m} - \omega_1^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} - \omega_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow a_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a_1 \rightarrow \boxed{\vec{v}_1 = a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}}$$

Y el modo relacionado con ω_2 :

$$\begin{pmatrix} \frac{2k}{m} - \omega_2^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} - \omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow b_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} b_1 \rightarrow \boxed{\vec{v}_b = b \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}}$$

Así pues, por lo visto en teoría, tendremos que los movimientos del sistema estarán dados por la expresión siguiente:

$$\begin{pmatrix} q'_1(t) \\ q'_2(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \delta_1) + b \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \delta_2)$$

Deshaciendo cambio de variables de q'_i a q_i :

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \delta_1) + b \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \delta_2) + \sqrt{m} \begin{pmatrix} l_0 + \frac{2mg}{k} \\ 2l_0 + \frac{3mg}{k} \end{pmatrix}$$

Y volviendo a las coordenadas originales x_i :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \delta_1) + b \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \delta_2) + \begin{pmatrix} l_0 + \frac{2mg}{k} \\ 2l_0 + \frac{3mg}{k} \end{pmatrix}$$

Q.E.F.

Ejercicio 16 (Problema 3.16). Dos partículas de masa m están ensartadas en sendas guías parabólicas verticales. Si x_i es la separación de cada partícula respecto al centro de su parábola, la altura de cada una es $y_i = \frac{k}{2mg} x_i^2$, donde k es una constante y g es la aceleración de la gravedad. Un muelle ideal de constante k' y longitud natural a une ambas partículas. Suponiendo que la distancia vertical entre ambas partículas se mantiene pequeña, y teniendo en cuenta la gravedad, determine: a) la posición de equilibrio, b) el lagrangiano cerca de dicha posición y c) las frecuencias normales; d) discuta cualitativamente qué sucede cuando inicialmente sólo se separa una de las partículas de la posición de equilibrio, cumpliéndose que $k' \ll k$.

Solución.

Apartado a:

$$V_g = mg y_1 + mg y_2 = mg \frac{k}{2mg} (x_1^2 + x_2^2) = \frac{k}{2} (x_1^2 + x_2^2)$$

Es como si tuviéramos dos muelles con orígenes en $x = -\frac{a}{2}$ y $x = \frac{a}{2}$.

$$V_m = \frac{1}{2} k' \left[\sqrt{(x_2 + a - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - a \right]^2$$

Podemos suponer $(x_2 + a - x_1)^2 \ll (y_2 - y_1)^2$, obteniendo:

$$V_m \approx \frac{1}{2} k' [|x_2 + a - x_1| - a]^2 = \frac{1}{2} k' [x_2 + a - x_1 - a]^2 = \frac{1}{2} k' (x_2 - x_1)^2$$

$$V = V_m + V_g = \frac{k}{2} (x_1^2 + x_2^2) + \frac{k'}{2} (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2) = \frac{1}{2} (k + k') (x_1^2 + x_2^2) + k' x_1 x_2$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla}V = 0 \Leftrightarrow dV = 0$$

$$dV = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

$$0 = \frac{\partial V}{\partial x_1} = (k + k') x_1 + k' x_2 = kx_1 + k' (x_1 + x_2)$$

$$0 = \frac{\partial V}{\partial x_2} = (k + k') x_2 + k' x_1 = kx_2 + k' (x_1 + x_2)$$

Restando, obtenemos:

$$0 = k (x_1 - x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Sustituyendo en alguna de ellas:

$$2k' x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

Solución de equilibrio $x_1 = 0, x_2 = 0$.

Apartado b:

$$x_1, x_2, y_1 = \frac{k}{2mg} x_1^2, y_2 = \frac{k}{2mg} x_2^2$$

$$T = \frac{1}{2} m x_1^2 + \frac{1}{2} m x_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} (k + k') (x_1^2 + x_2^2) + k' x_1 x_2$$

$$\mathcal{L} = T - V =$$

$$= \frac{1}{2} m x_1^2 + \frac{1}{2} m x_2^2 - \frac{1}{2} (k + k') (x_1^2 + x_2^2) - k' x_1 x_2$$

Apartado c: Tenemos que ortonormalizar las coordenadas:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \sqrt{m}x_1, \quad q_2 = \sqrt{m}x_2 \\
 q_1 = 0 &\Leftrightarrow x_1 = 0, \quad q_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0 \\
 x_1 &= \frac{q_1}{\sqrt{m}}, \quad x_2 = \frac{q_2}{\sqrt{m}} \\
 T &= \frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}q_2^2 \\
 V &= \frac{1}{2}(k + k')\left(\frac{q_1^2}{m} + \frac{q_2^2}{m}\right) + k'\frac{q_1}{\sqrt{m}}\frac{q_2}{\sqrt{m}} = \frac{1}{2}\frac{k + k'}{m}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{k'}{m}q_1q_2
 \end{aligned}$$

Podríamos extraer el valor de las parciales directamente de aquí, pues es un polinomio y el desarrollo de Taylor de un polinomio es el propio polinomio.

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} \right]_{(0,0)} = \left[\frac{\partial V}{\partial q_1} \left(\frac{k + k'}{m}q_1 + \frac{k'}{m}q_2 \right) \right]_{(0,0)} = \left[\frac{k + k'}{m} \right]_{(0,0)} = \frac{k + k'}{m} \\
 k_{22} &= \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} \right]_{(0,0)} = \left[\frac{\partial V}{\partial q_2} \left(\frac{k + k'}{m}q_2 + \frac{k'}{m}q_1 \right) \right]_{(0,0)} = \left[\frac{k + k'}{m} \right]_{(0,0)} = \frac{k + k'}{m} \\
 k_{12} = k_{21} &= \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \right]_{(0,0)} = \left[\frac{\partial V}{\partial q_1} \left(\frac{k + k'}{m}q_2 + \frac{k'}{m}q_1 \right) \right]_{(0,0)} = \left[\frac{k'}{m} \right]_{(0,0)} = \frac{k'}{m} \\
 K &= \begin{pmatrix} \frac{k+k'}{m} & \frac{k'}{m} \\ \frac{k'}{m} & \frac{k+k'}{m} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} k+k' & k' \\ k' & k+k' \end{pmatrix} \\
 \omega^2 &= \frac{1}{m}\lambda \\
 0 &= \begin{vmatrix} k+k'-\lambda & k' \\ k' & k+k'-\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{m} \left[(k+k'-\lambda)^2 - k'^2 \right] \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 0 &= (k+k'-\lambda-k')(k+k'-\lambda+k') = (k-\lambda)(k+2k'-\lambda) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \lambda &= \begin{cases} k+2k' \\ k \end{cases} \Leftrightarrow \omega^2 = \begin{cases} \frac{k+2k'}{m} \\ \frac{k}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \omega = \begin{cases} \sqrt{\frac{k+2k'}{m}} \\ \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Hallamos los autovectores:

$$\begin{aligned}
 (K - k\mathbb{I}) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (0) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} k' & k' \\ k' & k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} k'a + k'b = 0 \\ k'a + k'b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -b \\
 V_k &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
 [K - (k+2k')\mathbb{I}] \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (0) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -k' & k' \\ k' & -k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -k'a + k'b = 0 \\ k'a - k'b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b \\
 V_{k+2k'} &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
 q(t) &= A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \left(\sqrt{\frac{k+2k'}{m}}t + \phi \right) + B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \psi \right) \\
 q(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left[\alpha \sin \left(\sqrt{\frac{k+2k'}{m}}t \right) + \beta \cos \left(\sqrt{\frac{k+2k'}{m}}t \right) \right] + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left[\gamma \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t \right) + \delta \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t \right) \right]
 \end{aligned}$$

Apartado d: Como es $k' \ll k$, es $k + 2k' \approx k$. Así:

$$q(t) \approx \begin{cases} (\alpha + \gamma) \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + (\beta + \delta) \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \\ (\alpha - \gamma) \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + (\beta - \delta) \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \end{cases}$$

$$X(t) \approx \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{cases} (\alpha + \gamma) \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + (\beta + \delta) \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \\ (\alpha - \gamma) \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + (\beta - \delta) \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \end{cases}$$

Tenemos las condiciones iniciales $x_2(0) = 0$ y $\dot{x}_2(0) = 0$.

$$0 = x_2(0) = \beta - \delta \Leftrightarrow \beta = \delta$$

$$0 = \dot{x}_2(0) = \sqrt{\frac{k}{m}} (\alpha - \gamma) \Leftrightarrow \alpha = \gamma$$

De forma que es $x_2(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$.

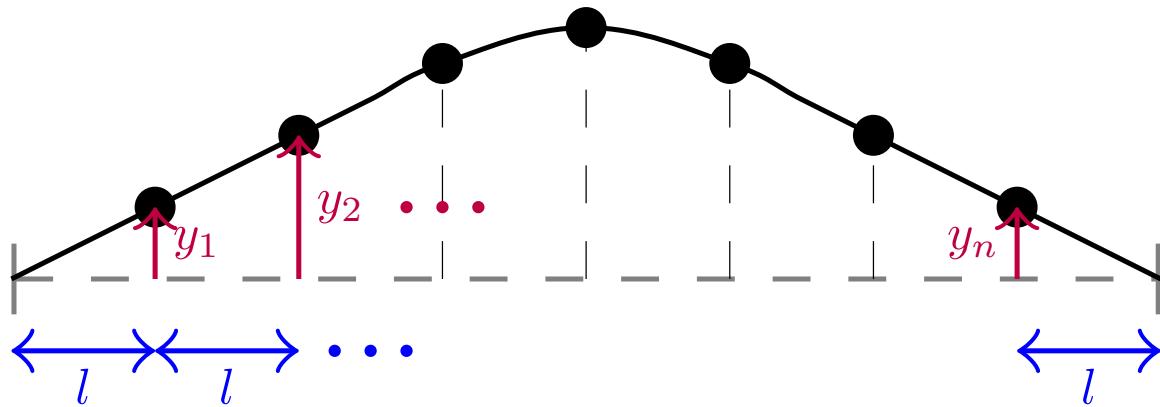
Q.E.F.

Capítulo 4

Oscilaciones mecánicas

4.1. Oscilaciones de partículas en una cuerda

Proposición 38. Consideremos un sistema de n partículas de masa m situadas sobre una cuerda sin masa y elástica como viene descrito en la ilustración siguiente.



Llamaremos y_1, \dots, y_n a los desplazamientos transversales de cada partícula con respecto a su posición de equilibrio y denotaremos con l a la distancia longitudinal (es decir, en horizontal) que hay entre cada una de las partículas. Asimismo, supondremos constante el módulo de la tensión de la cuerda, que denotaremos con F . Además, consideraremos que los extremos de la cuerda están fijos en la posición de equilibrio, de forma que es $y_0 = y_{n+1} = 0$. Supondremos, de forma adicional, que las partículas únicamente oscilan en vertical (transversalmente), o sea, que no hay ningún desplazamiento horizontal (longitudinal). Entonces, la energía potencial del sistema, siempre que se de $y_{j+1} - y_j \ll l \ \forall j = 0, \dots, n$, puede aproximarse como:

$$V \approx \frac{F}{2l} \sum_{j=0}^n (y_{j+1} - y_j)^2$$

Además, se satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \vdots \\ \ddot{y}_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

donde $\omega_0^2 = \frac{F}{ml}$.

Demostración. Primero, consideremos la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \cdots + \dot{y}_n^2)$$

Nótese que estas coordenadas son ortogonales.

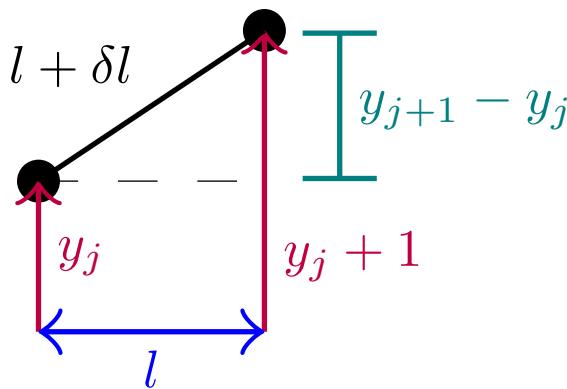
La forma de hallar la energía potencial del sistema es, en este caso, aplicar su definición:

$$V_B - V_A = -W_{A \rightarrow B}$$

Es decir, la diferencia de potencial entre los puntos B y A es igual al opuesto al trabajo necesario para ir de A a B . En nuestro caso, la única fuerza que hace trabajo es la tensión F . Por ahora, consideremos un segmento de cuerda l delimitado por las partículas y_{j+1} e y_j . El trabajo realizado por la tensión será:

$$W_{(j+1,j)} = -F\delta l \quad (4.1.1)$$

siendo δl el alargamiento de la cuerda que une ambas partículas. Nótese que el signo menos es debido a que la tensión tiende a reducir la distancia entre la partículas. Esto puede verse mejor con el siguiente dibujo:



De esta forma, por el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$\begin{aligned} (l + \delta l)^2 &= l^2 + (y_{j+1} - y_j)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow l + \delta l &= \sqrt{l^2 + (y_{j+1} - y_j)^2} = \sqrt{l^2 \left(1 + \frac{(y_{j+1} - y_j)^2}{l^2} \right)} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow l + \delta l = l \sqrt{1 + \frac{(y_{j+1} - y_j)^2}{l^2}} \quad (4.1.2)$$

Como es $y_{j+1} - y_j \ll l$, podemos hacer un desarrollo de Taylor de la expresión anterior cuando $\frac{(y_{j+1} - y_j)^2}{l^2} \rightarrow 0$. Es decir, queremos hacer un desarrollo de Taylor a primer orden de la función:

$$f(x) = \sqrt{1+x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

De esta forma, por el teorema de Taylor-Young:

$$\sqrt{1+x} = f(0) + f'(0)x = 1 + \frac{1}{2}x \quad \text{cuando } x \rightarrow 0$$

Aplicando este desarrollo a la expresión 4.1.2, obtenemos:

$$l + \delta l \approx l \left(1 + \frac{(y_{j+1} - y_j)^2}{2l^2} \right) \Leftrightarrow \delta l \approx \frac{(y_{j+1} - y_j)^2}{2l}$$

A continuación, sustituyendo en la ecuación 4.1.1 en la página anterior, llegamos a:

$$W_{(j+1,j)} \approx -\frac{F}{2l} (y_{j+1} - y_j)^2$$

Ahora, aplicamos la definición de energía potencial, obteniendo:

$$V = - \sum_{j=0}^n W_{(j+1,j)} \approx \sum_{j=0}^n \frac{F}{2l} (y_{j+1} - y_j)^2$$

Para obtener las ecuaciones del movimiento, aplicamos la segunda ley de Newton, sabiendo que la fuerza que actúa sobre la partícula j -ésima es justo:

$$F_j = -\frac{\partial V}{\partial y_j}$$

Como el movimiento de las partículas sólo puede darse en la dirección vertical, aplicando la segunda ley de Newton llegamos a:

$$m\ddot{y}_j = -\frac{\partial V}{\partial y_j} \Leftrightarrow \ddot{y}_j = -\frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial y_j} \quad (4.1.3)$$

Ahora, determinemos $\frac{\partial V}{\partial y_j}$. Al ser la derivada una aplicación lineal:

$$\frac{\partial V}{\partial y_j} = \sum_{i=0}^n \frac{F}{2l} \frac{\partial}{\partial y_j} (y_{i+1} - y_i)^2 \quad (4.1.4)$$

Dado que es $j \neq 0 \wedge j \neq n + 1$ (esos índices no representan partículas), cada sumando de la expresión 4.1.4 únicamente será no nulo cuando sea $i + 1 = j$ o $i = j$. De esta forma, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y_j} &= \frac{F}{2l} \left[\frac{\partial}{\partial y_j} (y_j - y_{j-1})^2 + \frac{\partial}{\partial y_j} (y_{j+1} - y_j)^2 \right] = \\ &= \frac{F}{2l} [2(y_j - y_{j-1}) + 2(y_{j+1} - y_j)(-1)] = \\ &= \frac{F}{l} [y_j - y_{j-1} - y_{j+1} + y_j] = \frac{F}{l} (-y_{j-1} + 2y_j - y_{j+1}) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación 4.1.3 en la página anterior, obtenemos:

$$\ddot{y}_j = -\frac{F}{ml} (-y_{j-1} + 2y_j - y_{j+1})$$

Dado que es $y_0 = y_{n+1} = 0$, obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\ddot{y}_1 = -\frac{F}{ml} (2y_1 - y_2)$$

$$\ddot{y}_2 = -\frac{F}{ml} (-y_1 + 2y_2 - y_3)$$

⋮

$$\ddot{y}_{n-1} = -\frac{F}{ml} (-y_{n-2} + 2y_{n-1} - y_n)$$

$$\ddot{y}_n = -\frac{F}{ml} (-y_{n-1} + 2y_n)$$

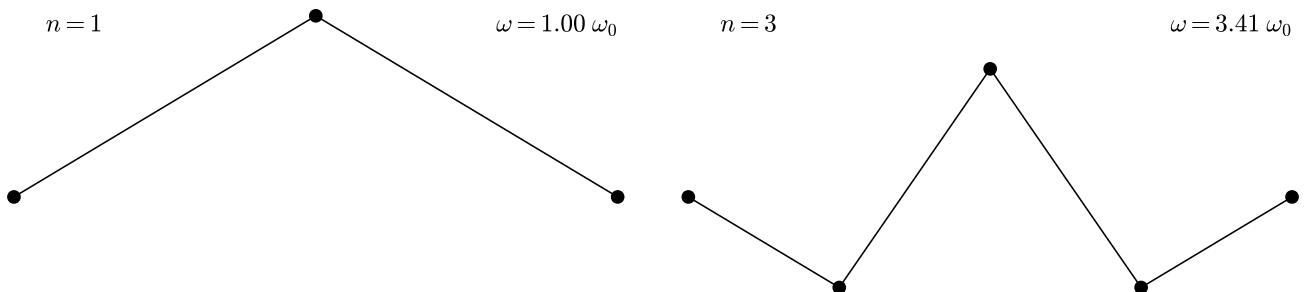
El sistema de ecuaciones diferenciales anterior, puede ser escrito matricialmente como:

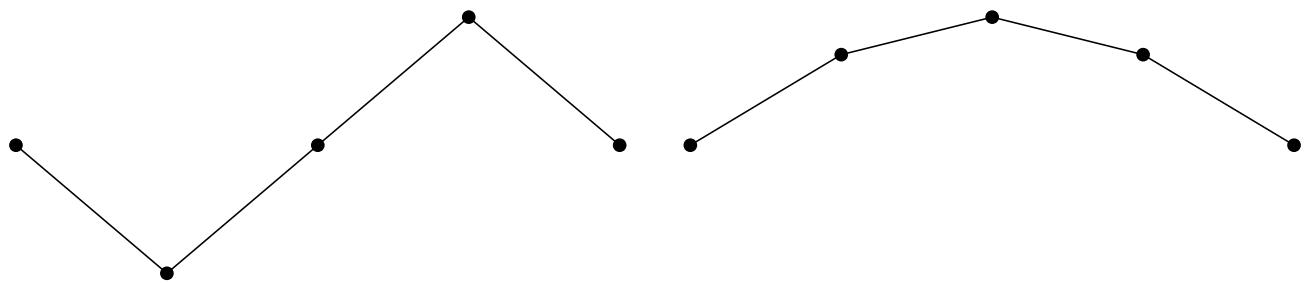
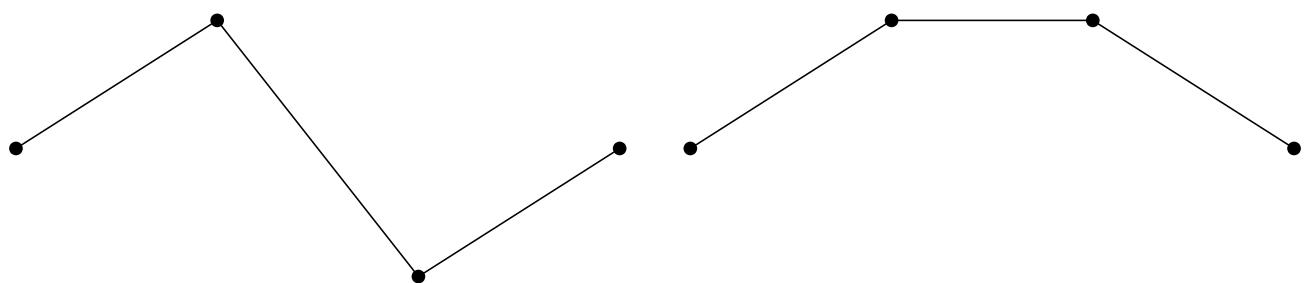
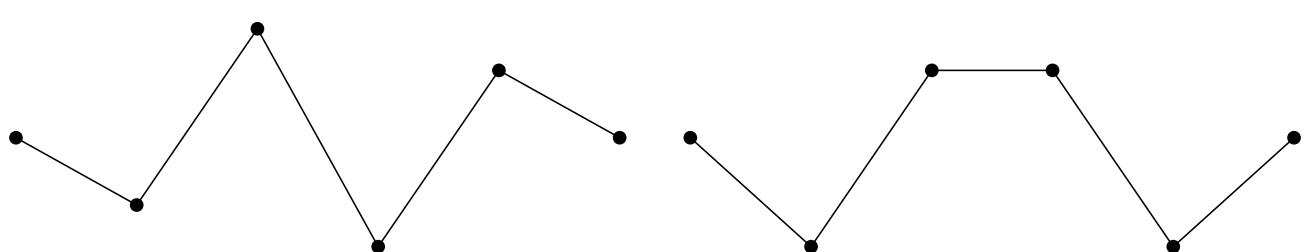
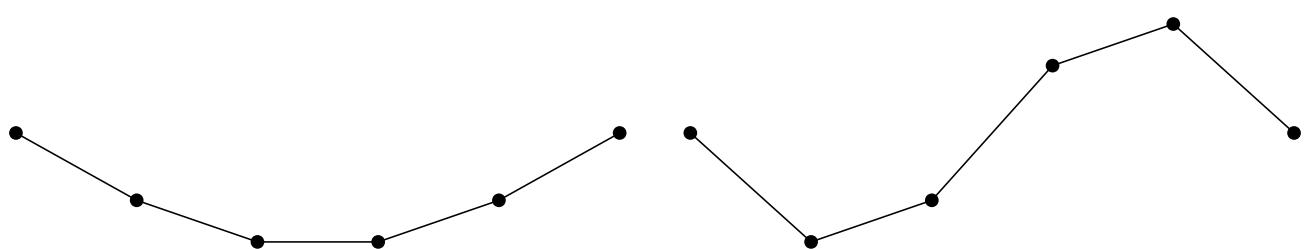
$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \vdots \\ \ddot{y}_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

donde $\omega_0^2 = \frac{F}{ml}$, que tiene unidades de frecuencia al cuadrado.

Q.E.D.

Observación 32. Nótese que la proposición 38 en la página 161 nos dice que un cuerdas formada por n partículas es equivalente a un sistema de los estudiados en el teorema 8 en la página 138. Es decir, que tendremos que hallar los valores propios y los vectores propios de la matriz que aparece en la proposición 38 en la página 161 para hallar la solución. A continuación, representamos todos los modos posibles para $n = 1, 3, 2, 4$.



$n = 3$ $\omega = 2.00 \omega_0$ $n = 3$ $\omega = 0.586 \omega_0$  $n = 2$ $\omega = 3.00 \omega_0$ $n = 2$ $\omega = 1.00 \omega_0$  $n = 4$ $\omega = 3.62 \omega_0$ $n = 4$ $\omega = 2.62 \omega_0$  $n = 4$ $\omega = 0.382 \omega_0$ $n = 4$ $\omega = 1.38 \omega_0$ 

Pueden verse todos los modos posibles correspondientes a $n = 1, \dots, 10$ en el siguiente vídeo¹.

4.2. Ecuaciones de Lagrange en una cuerda tensa

Lema 2 (Lema fundamental del cálculo de variaciones). *Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en Ω . Si para toda función $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^{(\infty)}$ con soporte compacto se da:*

$$\int_{\Omega} f(x) h(x) = 0$$

Entonces, f es idénticamente nula: $f = 0$.

Lema 3 (Primera identidad de Green). *Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n y sean $\varphi, \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones de clase $C^{(2)}$. Entonces:*

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \psi) = \int_{\partial\Omega} \psi (\vec{\nabla} \varphi \cdot \hat{n}) - \int_{\Omega} \psi \nabla^2 \varphi$$

donde \hat{n} indica el vector normal a $\partial\Omega$ y con $\partial\Omega$ indicamos la frontera de Ω .

Teorema 9 (Ecuación de Euler-Lagrange para medios continuos). *Sea $[t_0, t_f] \subset \mathbb{R}$ y Ω un abierto de \mathbb{R}^n que contiene el volumen de estudio (para $n = 3$), el área de estudio (para $n = 2$) o la longitud de estudio (para $n = 1$). Además, sea:*

$$\begin{aligned} y : [t_0, t_f] \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, \vec{x}) &\longrightarrow y(t, \vec{x}) \end{aligned}$$

una función de clase $C^{(1)}$ y consideremos la densidad lagrangiana $\mathcal{L} \left(y, \frac{\partial y}{\partial t}, \vec{\nabla}_{\vec{x}} y, t, \vec{x} \right)$ (por unidad de volumen, longitud o área, dependiendo del caso) de un sistema físico, donde con $\vec{\nabla}_{\vec{x}} y$ denotamos el gradiente de y restringido a las componentes de \vec{x} . Entonces, la función y que hace que la integral:

$$F = \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \mathcal{L} \left(y, \frac{\partial y}{\partial t}, \vec{\nabla}_{\vec{x}} y, t, \vec{x} \right) d^n \vec{x} dt$$

sea estacionaria satisface:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)} \right) = 0$$

Demostración. Para simplificarnos el estudio, vamos a realizar un cambio de variables $z_0 = t$, $z_i = x_i \forall i = 1, \dots, n$. Asimismo, llamaremos $\Gamma := [t_0, t_f] \times \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. De esta forma, será $\vec{z} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Mediante este cambio, podemos agrupar las dependencias de \mathcal{L} respecto de $\frac{\partial y}{\partial t}$ y $\vec{\nabla}_{\vec{x}} y = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n} \right)$ en un único término $\vec{\nabla} y = \left(\frac{\partial y}{\partial z_0}, \frac{\partial y}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial z_n} \right) = \left(\frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n} \right)$ y las dependencias respecto a t y $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ en $\vec{z} = (z_0, z_1, \dots, z_n) = (t, x_1, \dots, x_n)$. De esta forma, el funcional F queda:

$$F = \int_{\Gamma} \mathcal{L} \left(y, \vec{\nabla} y, \vec{z} \right)$$

Nuestro objetivo es hallar qué condición debe cumplir y para que F sea estacionaria. Para ello, supondremos que y hace que la integral F sea estacionaria y trabajaremos con la función:

$$g(\vec{z}) = y(\vec{z}) + \varepsilon \eta(\vec{z}) \tag{4.2.1}$$

¹<https://youtu.be/TIzr02EeGDk>

donde $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y $\eta : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ es cualquier función arbitraria de clase $C^{(\infty)}$ que satisface:

$$\eta(\vec{z}) = 0 \quad \forall \vec{z} \in \partial\Gamma \quad (4.2.2)$$

donde con $\partial\Gamma$ denotamos la frontera de Γ . Derivando obtenemos:

$$\vec{\nabla}g(\vec{z}) = \vec{\nabla}y(\vec{z}) + \varepsilon \vec{\nabla}\eta(\vec{z}) \quad (4.2.3)$$

En función de g , el funcional F queda:

$$F = \int_{\Gamma} \mathcal{L}(g, \vec{\nabla}g, \vec{z})$$

Sabemos que $\left[\frac{dF}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = 0$, ya que, por nuestras suposiciones, $\varepsilon = 0 \Rightarrow g = y$ hace la integral F estacionaria. De esta forma, nuestro objetivo va a ser calcular $\frac{dF}{d\varepsilon}$. Suponiendo suficientemente buenas propiedades para \mathcal{L} , por el teorema de Leibniz de derivación bajo signo integral, llegamos a:

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g} \frac{dg}{d\varepsilon} + \vec{\nabla}_{\vec{\nabla}g} \mathcal{L} \cdot \frac{d}{d\varepsilon} \vec{\nabla}g + \vec{\nabla}_{\vec{z}} \mathcal{L} \cdot \frac{d\vec{z}}{d\varepsilon} \right] \quad (4.2.4)$$

donde:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_{\vec{\nabla}g} \mathcal{L} &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial g}{\partial z_0} \right)}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial g}{\partial z_1} \right)}, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial g}{\partial z_n} \right)} \right) \\ \frac{d}{d\varepsilon} \vec{\nabla}g &= \left(\frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\partial g}{\partial z_0} \right), \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\partial g}{\partial z_1} \right), \dots, \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\partial g}{\partial z_n} \right) \right) \\ \vec{\nabla}_{\vec{z}} \mathcal{L} &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_n} \right) \\ \frac{d\vec{z}}{d\varepsilon} &= \left(\frac{dz_0}{d\varepsilon}, \frac{dz_1}{d\varepsilon}, \dots, \frac{dz_n}{d\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

De las ecuaciones 4.2.1 en la página anterior y 4.2.3 deducimos:

$$\frac{dg}{d\varepsilon} = \eta, \quad \frac{d}{d\varepsilon} \vec{\nabla}g = \vec{\nabla}\eta$$

Además, como $\vec{z} = (t, x_1, \dots, x_n)$ no depende de ε , es $\frac{d\vec{z}}{d\varepsilon} = \vec{0}$. Sustituyendo en la expresión 4.2.4, obtenemos:

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g} \eta + \vec{\nabla}_{\vec{\nabla}g} \mathcal{L} \cdot \vec{\nabla}\eta \right] = \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g} \eta + \int_{\Gamma} \left(\vec{\nabla}_{\vec{\nabla}g} \mathcal{L} \cdot \vec{\nabla}\eta \right)$$

Por la primera identidad de Green (ver lema 3 en la página anterior) tomando $\varphi = \mathcal{L}$ y $\psi = \eta$, obtenemos:

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g} \eta + \int_{\partial\Gamma} \eta \vec{\nabla}_{\vec{\nabla}g} \mathcal{L} - \int_{\Gamma} \eta \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{\nabla}g} \mathcal{L} \right)$$

Por la ecuación 4.2.2, η se anula sobre todo punto de $\partial\Gamma$, luego dicha integral es nula. De esta forma, obtenemos:

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g} \eta - \int_{\Gamma} \eta \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{\nabla}g} \mathcal{L} \right) = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{\nabla}g} \mathcal{L} \right) \eta$$

A continuación, recordemos que cuando $\varepsilon = 0$, $g = y$ y la integral F es estacionaria. Por tanto, deberá ser:

$$\left[\frac{dF}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = 0 \Leftrightarrow \left[\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{\nabla}g} \mathcal{L} \right) \eta \right]_{\varepsilon=0} = 0$$

Por la ecuación 4.2.1 en la página 166, sabemos que $g(\varepsilon = 0) = y$. Así, obtenemos:

$$\left[\frac{dF}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = 0 \Leftrightarrow \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{\nabla}y} \mathcal{L} \right) \eta = 0$$

Por último, como la igualdad anterior debe cumplirse para cualquier forma funcional de η y como η es $C^{(\infty)}$, podemos aplicar el lema fundamental del cálculo de variaciones (ver lema 2 en la página 166), obteniendo que, necesariamente, se da:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{\nabla}y} \mathcal{L} = 0$$

Para dar cima y cabo a esta demostración, únicamente tenemos que deshacer el cambio de variable hecho anteriormente. Así tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{\nabla}y} \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial z_0}, \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial z_0} \right)}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial z_1} \right)}, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial z_n} \right)} \right) = \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)}, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x_n} \right)} \right) = \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)} \right) \end{aligned}$$

con lo que llegamos al enunciado. Q.E.D.

Proposición 39. *Sea una cuerda considerada como un medio continuo de densidad lineal de masa μ constante. Sea $y(x, t)$ la función que describe el desplazamiento transversal de cada punto x de la cuerda. Si suponemos que cada uno de los diferenciales de cuerda (que forman la cuerda) únicamente puede desplazarse en el eje vertical (transversalmente), entonces $y(x, t)$ satisface la ecuación de ondas en una dimensión:*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

siendo $c^2 = \frac{F}{\mu}$ el cuadrado de la velocidad de propagación de la onda en el medio.

Demostración. En el caso discreto, según la proposición 38 en la página 161, la energía potencial venía dada por:

$$V \approx \frac{F}{2l} \sum_{j=0}^n (y_{j+1} - y_j)^2$$

Consideremos la energía potencial por unidad de longitud, que denotaremos con \mathcal{V} , que aporta uno de los sumandos anteriores:

$$\mathcal{V} = \frac{V}{l} = \frac{F}{2l^2} (y_{j+1} - y_j)^2$$

Vamos a utilizar el cambio de notación $\Delta y := y_{j+1} - y_j$ y $\Delta x := l$ (recordamos que l era la distancia entre dos partículas sucesivas de la cuerda discreta). Así, obtenemos:

$$\mathcal{V} = \frac{F}{2(\Delta x)^2} (\Delta y)^2 = \frac{F}{2} \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} = \frac{F}{2} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2$$

Si hacemos tender Δy y Δx a cero, obtenemos el límite de un cociente incremental, que es justo una derivada:

$$\mathcal{V} = \frac{F}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \tag{4.2.5}$$

De esta forma, hemos obtenido la densidad de energía potencial \mathcal{V} . Para hallar la energía potencial total únicamente tendríamos que hacer:

$$V = \int_C \mathcal{V} dx$$

donde con C denotamos el conjunto de puntos de la cuerda. Por otra parte, la densidad de energía cinética por unidad de longitud queda:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \quad (4.2.6)$$

de forma que:

$$T = \int_C \mathcal{T} dx$$

Mediante las ecuaciones 4.2.5 en la página anterior y 4.2.6, vemos que la densidad lagrangiana del sistema tiene la expresión:

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{F}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

Por el teorema 9 en la página 166, debe ser:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)} \right) &= 0 \Leftrightarrow -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) + F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned}$$

que es la ecuación de ondas unidimensional correspondiente a ondas que se propagan con velocidad $c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$. Q.E.D.

Corolario 24. *Sea una cuerda considerada como un medio continuo de densidad lineal de masa μ constante. Sea $y(x, t)$ la función que describe el desplazamiento transversal de cada punto x de la cuerda. Supondremos que cada uno de los diferenciales de cuerda (que forman la cuerda) únicamente puede desplazarse en el eje vertical (transversalmente). Entonces, la densidad de energía mecánica por unidad de longitud $\mathcal{E} = \mathcal{T} + \mathcal{V}$ no se conserva, en general, se satisface la relación:*

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \right)$$

siendo F la tensión de la cuerda.

No obstante, la energía mecánica total $E = \int_C \mathcal{E} dx$ sí que se conserva, donde con C denotamos el conjunto de los puntos de la cuerda.

Demostración. Tenemos:

$$\mathcal{E} = \mathcal{T} + \mathcal{V} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

A continuación, derivamos con respecto al tiempo, obteniendo:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mu \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + F \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)$$

Suponiendo que la solución y es $C^{(2)}$, entonces:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial t} + F \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)$$

Ahora, dado que por la proposición 39 en la página 168 se da:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Leftrightarrow \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

sustituyendo en la ecuación que teníamos llegamos a:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial y}{\partial t} + F \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = F \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]$$

Por la regla del producto (pensada en sentido inverso), obtenemos:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \right)$$

Y, la expresión anterior es, en general, distinta de cero.

Ahora, consideremos la energía total E :

$$E = \int_C \mathcal{E} dx$$

donde con C denotamos los puntos de la cuerda. Suponiendo suficientemente buenas propiedades para y , por el teorema de derivación bajo signo integral, obtenemos:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_C \mathcal{E} dx \right) = \int_C \frac{d\mathcal{E}}{dt} dx = \int_C F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \right) dx$$

Ahora, consideraremos $x = 0$ un extremo de la cuerda y $x = l$ el otro extremo. Dado que los extremos no se mueven, debe ser $\frac{\partial y}{\partial t}(x = 0) = 0 = \frac{\partial y}{\partial t}(x = l)$. De esta forma, la integral anterior queda:

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^l F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \right) dx = F \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \right) dx$$

Por la regla de Barrow, obtenemos:

$$\frac{dE}{dt} = F \left[\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \right]_0^l = F (0 - 0) = 0$$

De esta manera, la energía total de la cuerda sí que se conserva.

Q.E.D.

Proposición 40. *La solución general de la ecuación de ondas presente en la proposición 39 en la página 168 puede ser expresada como:*

$$y(t, x) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

siendo $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones arbitrarias. Imponiendo que los extremos de la cuerda estén fijos, la solución puede simplificarse a:

$$y(t, x) = f(x + ct) - f(-x - ct)$$

siendo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria de una variable con periodo $2l$, siendo l la longitud (en horizontal) de la cuerda.

Demostración. Tenemos la ecuación diferencial en derivadas parciales presentada en la proposición 39 en la página 168:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (4.2.7)$$

Vamos a hacer el cambio de variable:

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct$$

Ahora, debemos ver cómo queda la ecuación diferencial con el cambio de variable. Para ello, resulta útil el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{c} x \\ t \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow y \rightarrow \begin{cases} \xi \rightarrow \begin{cases} x \\ t \end{cases} \\ \eta \rightarrow \begin{cases} x \\ t \end{cases} \end{cases} \end{array} \right.$$

Usando el diagrama, vemos que deben darse las siguientes igualdades:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

A continuación, debemos hallar el valor de todas las derivadas parciales que aparecen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = c$$

De esta forma, las ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -c \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta} c = c \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \end{aligned}$$

Derivando otra vez, llegamos a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= c \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = \\ &= c \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} (-c) + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} c - \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} (-c) - \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} c \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} \right) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial 4.2.7 en la página anterior, llegamos a:

$$\begin{aligned} c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} \right) &= c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 &= 4 \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} = 0 \end{aligned}$$

Claramente, la solución general de la ecuación diferencial anterior es:

$$y(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

donde f, g son dos funciones arbitrarias de una variable real. Deshaciendo el cambio, obtenemos que:

$$y(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

Ahora, consideraremos $x = 0$ y $x = l$ los extremos de la cuerda. Entonces, como éstos están fijos, debe cumplirse:

$$y(t, 0) = 0 \Leftrightarrow f(-ct) + g(ct) = 0 \Leftrightarrow g(ct) = -f(-ct) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Tomando $\mu = ct$, obtenemos:

$$g(\mu) = -f(-\mu) \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Por tanto, como g y f son funciones de una variable, lo anterior debe darse siempre. Así, podemos expresar y como:

$$y(t, x) = f(x - ct) - f(-x - ct)$$

Por otra parte, evaluando en $x = l$, obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 = y(t, l) &= f(l - ct) - f(-l - ct) \Leftrightarrow f(l - ct) = f(-l - ct) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(2l - ct - l) = f(-ct - l) \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Llamando $\mu = -ct - l$, obtenemos:

$$f(2l + \mu) = f(\mu) \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

De esta forma, f es una función periódica con periodo $2l$.

Q.E.D.

Corolario 25 (Propagación de una perturbación). *Consideremos una cuerda tensa de longitud infinita (es decir, que sus extremos se encuentran muy lejos de nuestro intervalo de estudio). En $t = 0$, producimos una perturbación en la cuerda que hace que su forma venga dada por una función conocida $y_0(x)$. Entonces, el desplazamiento transversal de la cuerda de un punto x de la cuerda para cualquier instante t viene dado por:*

$$y(t, x) = \frac{1}{2}y_0(x - ct) + \frac{1}{2}y_0(x + ct)$$

Es decir, la perturbación inicial y_0 se propaga en ambas direcciones con velocidad c y amplitud $\frac{1}{2}$ de la inicial.

Demostración. Consideramos la solución general dada en la proposición 40 en la página 170:

$$y(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (4.2.8)$$

Cuando es $t = 0$, por hipótesis, se da:

$$y_0(x) = y(0, x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4.2.9)$$

donde la igualdad anterior se satisface, de esta forma, para todo el dominio de f . Examinemos ahora la parcial con respecto al tiempo. Recordemos que es f es una función de $\xi = x - ct$ y g una función de $\eta = x + ct$. De esta forma, por la regla de la cadena, obtenemos:

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t, x) = \frac{df}{d\xi}(x - ct)(-c) + \frac{dg}{d\eta}(x + ct)c$$

Como partimos del reposo, debe ser $\frac{\partial y}{\partial t}(0, x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Así:

$$0 = \frac{\partial y}{\partial t}(0, x) = -c \frac{df}{d\xi}(x) + c \frac{dg}{d\eta}(x) \Leftrightarrow \frac{df}{d\xi}(x) = \frac{dg}{d\eta}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Es decir, las derivadas de f y g coinciden. Por tanto, por el teorema fundamental del cálculo integral, tenemos:

$$f(\mu) = g(\mu) + K \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \quad (4.2.10)$$

Combinando las ecuaciones 4.2.9 y 4.2.10, obtenemos:

$$y_0(\mu) = 2g(\mu) + K \Leftrightarrow g(\mu) = \frac{y_0(\mu) - K}{2} \quad (4.2.11)$$

Por otra parte, combinando las ecuaciones 4.2.8 en la página anterior y 4.2.10 en la página anterior, obtenemos:

$$y(t, x) = g(x - ct) + K + g(x + ct)$$

Haciendo uso de la ecuación 4.2.11 en la página anterior, llegamos a:

$$\begin{aligned} y(t, x) &= \frac{y_0(x - ct) - K}{2} + K + \frac{y_0(x + ct) - K}{2} = \\ &= \frac{1}{2}y_0(x - ct) - \frac{K}{2} + K + \frac{1}{2}y_0(x + ct) - \frac{K}{2} = \\ &= \frac{1}{2}y_0(x - ct) + \frac{1}{2}y_0(x + ct) \end{aligned}$$

Q.E.D.

4.3. Modos normales en una cuerda tensa

Proposición 41. *Suponiendo dependencia armónica con respecto al tiempo, la solución general de la ecuación de ondas dada para una cuerda con extremos fijos en la proposición 40 en la página 170 puede expresarse como:*

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{l} x\right) \cos\left(n \frac{\pi c}{l} t\right)$$

donde c es la velocidad de propagación en la cuerda, l es la longitud de la cuerda y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de constantes (números reales) que dependen de las condiciones iniciales.

Demostración. Vamos a buscar soluciones de la forma:

$$y(t, x) = A(x) \cos(\omega t)$$

donde $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de una variable y ω es un parámetro a determinar. Derivando, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t}(t, x) &= -\omega A(x) \operatorname{sen}(\omega t) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t, x) &= -\omega^2 A(x) \cos(\omega t) \\ \frac{\partial y}{\partial x}(t, x) &= \frac{dA}{dx}(x) \cos(\omega t) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{d^2 A}{dx^2}(x) \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de ondas (ver proposición 39 en la página 168), llegamos a:

$$-\omega^2 A(x) \cos(\omega t) = c^2 \frac{d^2 A}{dx^2}(x) \cos(\omega t)$$

Suponiendo que $\cos(\omega t)$ no se anula, llegamos a:

$$-\omega^2 A(x) = c^2 \frac{d^2 A}{dx^2}(x) \Leftrightarrow -\frac{\omega^2}{c^2} A(x) = \frac{d^2 A}{dx^2}(x) \Leftrightarrow \frac{d^2 A}{dx^2}(x) + \frac{\omega^2}{c^2} A(x) = 0$$

que es la ecuación diferencial de un oscilador armónico simple. Llamando:

$$k^2 := \frac{\omega^2}{c^2} \Leftrightarrow k = \frac{\omega}{c} \tag{4.3.1}$$

la solución general de la ecuación diferencial anterior es:

$$A(x) = a \cos(kx) + b \sin(kx)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes que dependen de las condiciones iniciales.

A continuación, imponiendo las condiciones dadas por los extremos de la cuerda $A(0) = A(l) = 0$, obtenemos:

$$A(x=0) = 0 \Leftrightarrow a \cos(0) + b \sin(0) \Leftrightarrow a = 0$$

$$A(x=l) = 0 \Leftrightarrow b \sin(kl) = 0 \stackrel{b \neq 0}{\Leftrightarrow} \sin(kl) = 0 \Leftrightarrow kl = n\pi \quad \forall n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k = n\frac{\pi}{l}$$

Como la cuerda no puede tener longitud nula ($n = 0$) ni amplitud negativa ($n < 0$), únicamente tienen sentido físico las soluciones con $n > 0$. Por otra parte, el parámetro b dependerá de las condiciones iniciales. A partir de este momento, llamaremos A_n al valor del parámetro b para un valor de n específico.

Por la ecuación 4.3.1 en la página anterior, debe ser:

$$n\frac{\pi}{l} = \frac{\omega}{c} \Leftrightarrow \omega = n\frac{\pi c}{l}$$

De esta forma, hemos obtenido que:

$$y_n(t, x) = A_n \sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right) \cos\left(n\frac{\pi c}{l}t\right)$$

es una solución de la ecuación de ondas (ver proposición 39 en la página 168).

Veamos, ahora, que para cada valor de n , las funciones y_n son linealmente independientes entre sí. Para ello, tenemos que ver que la única solución de la ecuación:

$$y_n(t, x) + y_m(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

es que sea $A_n = A_m = 0$, considerando $n \neq m$. Podemos escribir la ecuación anterior como:

$$A_n \sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right) \cos\left(n\frac{\pi c}{l}t\right) + A_m \sin\left(m\frac{\pi}{l}x\right) \cos\left(m\frac{\pi c}{l}t\right) = 0 \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

Si es $A_n = A_m = 0$, entonces la ecuación se cumple. Si sólo fuese $A_n = 0$, entonces para que la ecuación se cumpliera para cualquier $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ debería ser $A_m = 0$. Análogamente sucede si suponemos $A_m = 0$. Por tanto, supongamos que es $A_n, A_m \neq 0$ y veamos que llegamos a contradicción. De esta forma, podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$A_n \sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right) \cos\left(n\frac{\pi c}{l}t\right) = -A_m \sin\left(m\frac{\pi}{l}x\right) \cos\left(m\frac{\pi c}{l}t\right) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 \quad (4.3.2)$$

Evaluando en $t = 0$, obtenemos:

$$A_n \sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right) = -A_m \sin\left(m\frac{\pi}{l}x\right) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{cte} = \frac{A_n}{A_m} = -\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right)}{\sin\left(m\frac{\pi}{l}x\right)} =: g(x)$$

Es decir, lo anterior sólo puede darse si es $\frac{dg}{dx}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Calculando dicha derivada, obtenemos:

$$\frac{dg}{dx}(x) = -\frac{\cos\left(n\frac{\pi}{l}x\right) n\frac{\pi}{l} \sin\left(m\frac{\pi}{l}x\right) - \sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right) \cos\left(m\frac{\pi}{l}x\right) m\frac{\pi}{l}}{\sin^2\left(m\frac{\pi}{l}x\right)}$$

Si consideramos $x = \frac{l}{n\pi}$, entonces tenemos:

$$\frac{dg}{dx}\left(\frac{2l}{n}\right) = -\frac{n\frac{\pi}{l} \cos\left(n\frac{\pi}{l}\frac{2l}{n}\right) \sin\left(m\frac{\pi}{l}\frac{2l}{n}\right) - m\frac{\pi}{l} \sin\left(n\frac{\pi}{l}\frac{2l}{n}\right) \cos\left(m\frac{\pi}{l}\frac{2l}{n}\right)}{\sin^2\left(m\frac{\pi}{l}\frac{2l}{n}\right)} =$$

$$= -\frac{n\frac{\pi}{l} \overbrace{\cos(2\pi)}^{=1} \overbrace{\sin\left(2\pi\frac{m}{n}\right)}^{=0} - m\frac{\pi}{l} \overbrace{\sin(2\pi)}^{=0} \overbrace{\cos\left(2\pi\frac{m}{n}\right)}^{=1}}{\sin^2\left(2\pi\frac{m}{n}\right)} = -\frac{n\frac{\pi}{l}}{\sin\left(2\pi\frac{m}{n}\right)} \neq 0$$

Luego, no es $\frac{dg}{dx}(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Por consiguiente, es imposible que se dé la ecuación 4.3.2 en la página anterior si es $A_n, A_m \neq 0$.

De esta forma, efectivamente las soluciones obtenidas $y_n(t, x)$ son linealmente independientes entre sí. Dado que la derivada es lineal, una combinación lineal de soluciones sigue siendo solución. Por tanto:

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right) \cos\left(n\frac{\pi c}{l}t\right)$$

será solución de la ecuación de ondas dada en la proposición 39 en la página 168. Dicho de otra forma, las funciones $\{\sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right) \cos\left(n\frac{\pi c}{l}t\right)\}_{n=1}^{\infty}$ forman una base de un espacio vectorial de dimensión infinita (el espacio vectorial de las soluciones). Como no es posible llegar a una dimensión superior a infinito, necesariamente la suma infinita de todas las y_n será la solución general. Q.E.D.

Definición 29. Cada uno de los sumandos que aparecen en la expresión de la proposición 41 en la página 173 recibe el nombre de **modo normal**.

Además, llamamos **frecuencia angular** ω_n del modo normal al factor que multiplica a la t en el coseno:

$$\omega_n := n\frac{\pi c}{l}$$

Denominamos **número de ondas** k_n del modo normal al factor que multiplica a la x en el seno:

$$k_n := n\frac{\pi}{l}$$

Adicionalmente, llamamos **longitud de onda** λ_n del modo normal a:

$$\lambda_n := \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2\pi}{n\frac{\pi}{l}} = \frac{2l}{n}$$

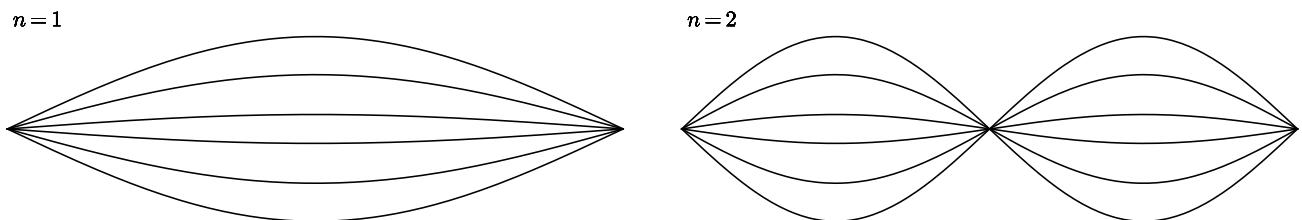
El modo correspondiente a $n = 1$ recibe el nombre de **modo fundamental** y su frecuencia angular temporal asociada:

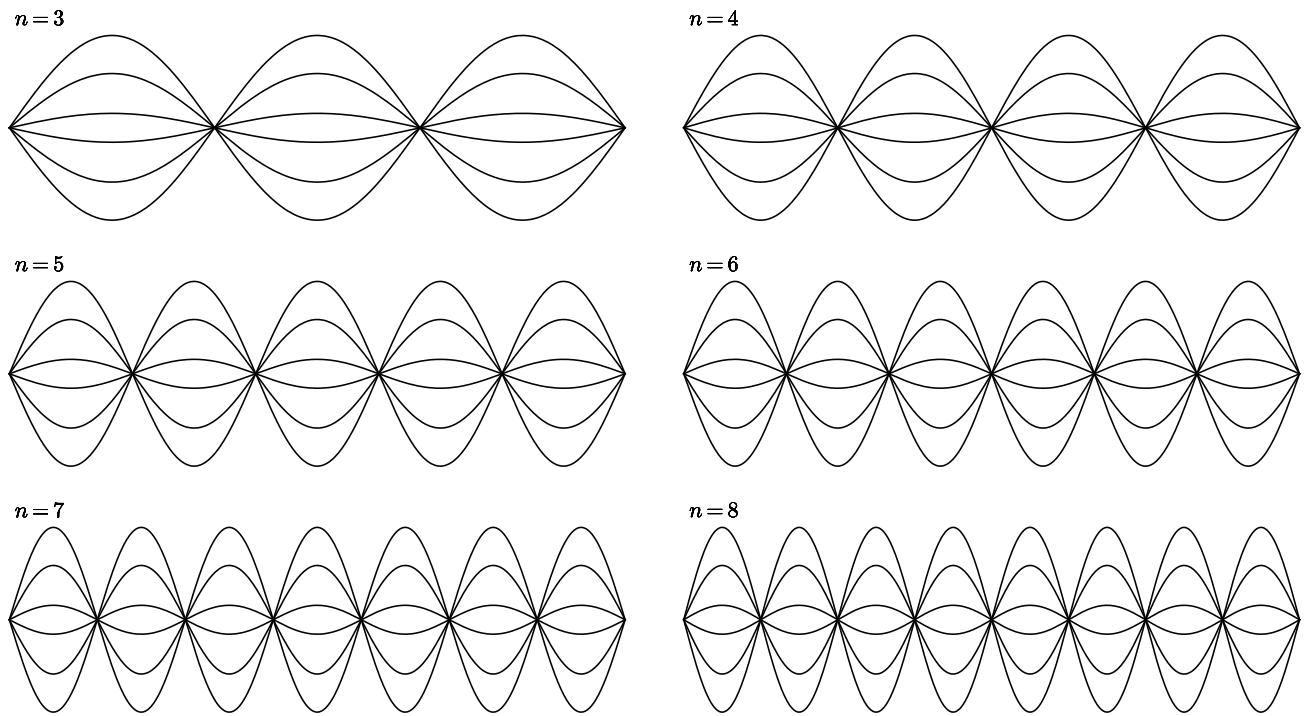
$$\omega_1 = \frac{\pi c}{l}$$

recibe el nombre de **frecuencia fundamental**.

El resto de modos correspondientes a $n > 1$ reciben el nombre de **armónicos**.

Observación 33. Nótese que por la definición de frecuencia fundamental dada en la definición 29, todo el resto de frecuencias son múltiplos de la fundamental. De hecho, la frecuencia n -ésima es n veces la frecuencia fundamental. Puede verse la forma de la solución de los modos normales en las siguientes ilustraciones:





así como en este vídeo².

Corolario 26. *La frecuencia fundamental de una cuerda puede expresarse como:*

$$\omega_1 = \pi \sqrt{\frac{F}{Ml}}$$

siendo F la tensión de la cuerda, M su masa y l su longitud.

Demostración. Combinando la definición de frecuencia fundamental dada en la definición 29 en la página anterior con la expresión para la velocidad de propagación dada en la proposición 39 en la página 168, obtenemos:

$$\omega_1 = \frac{\pi c}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{l}} \sqrt{\frac{F}{\mu l}} = \frac{\pi}{\sqrt{l}} \sqrt{\frac{F}{M}} = \pi \sqrt{\frac{F}{Ml}}$$

Q.E.D.

Observación 34. Fijándonos en la expresión dada por el corolario 26 vemos que:

- Si aumenta la tensión, la frecuencia fundamental aumenta.
- Si la masa aumenta, la frecuencia fundamental disminuye.
- Si aumentamos la longitud, la frecuencia fundamental disminuye.

Esto último es la razón por la que instrumentos de cuerda más grandes como el contrabajo (que tienen sus cuerdas más largas) suenan más graves que aquellos que son más pequeños como el violín (que tienen sus cuerdas más cortas).

Observación 35 (Percepción humana). Nuestro cerebro interpreta el modo fundamental de una vibración como el tono, mientras que el resto de armónicos son interpretados como el timbre. De manera que, en función del reparto de energía entre los armónicos, nuestro cerebro discrierne qué instrumento ha producido el sonido.

²<https://www.youtube.com/watch?v=wcswpyIFp4>

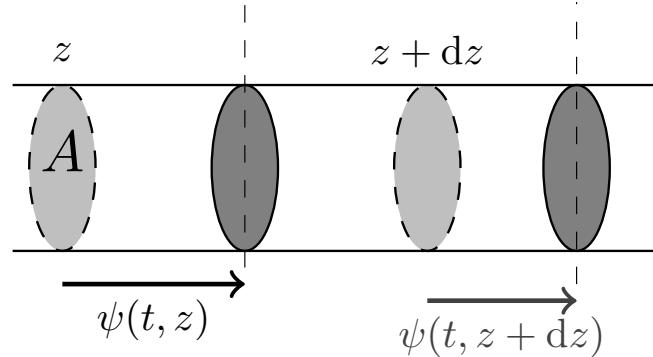
4.4. Ondas longitudinales

Proposición 42. *Sea un medio continuo tridimensional que puede asemejarse a un cilindro de sección constante A despreciable en comparación con la longitud del cilindro. Si el medio sufre una perturbación (que viene dada por una función $\psi(t, z)$) en la dirección del eje longitudinal del cilindro, entonces ésta se propaga satisfaciendo la ecuación de ondas:*

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

con velocidad $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$; siendo ρ la densidad volumétrica de masa del medio (que suponemos constante) y siendo E el módulo de Young del medio, el módulo de cizalladura del medio o el módulo de compresibilidad del medio, dependiendo de la naturaleza de la perturbación.

Demostración. Consideremos un cilindro de sección A y llamaremos Z al eje perpendicular a su sección. Ahora, nos centraremos en un segmento cilíndrico de espesor dz (cuando se encuentra en equilibrio) y área A que sometemos a una perturbación.



Debido a esta perturbación, los segmentos cilíndricos sufrirán una traslación o un alargamiento. Ambos efectos necesitarán de una fuerza para tener lugar, en concreto, el alargamiento se verá debido a fuerzas de igual módulo y sentido opuesto que actúen sobre el segmento cilíndrico, mientras que la traslación se deberá a una fuerza neta no nula sobre el centro de masas del segmento cilíndrico. En un instante t , el extremo izquierdo de nuestro segmento se encuentra en la posición $z + \psi(t, z)$ y el extremo derecho se encuentra en $z + dz + \psi(t, z + dz)$. En dicho instante t , por la ley de Young, la fuerza que actúa sobre la cara izquierda del segmento cilíndrico satisface:

$$\frac{1}{A} F(t, z) = E \frac{\Delta l}{l} \Leftrightarrow F(t, z) = AE \frac{\Delta l}{l} \quad (4.4.1)$$

donde A es la sección del cilindro, E es el módulo de Young, l es la longitud «de equilibrio» de nuestro segmento cilíndrico (en nuestro caso es $l = dz$) y Δl es el alargamiento de nuestro segmento cilíndrico. En nuestro caso Δl viene dado por la resta de la perturbación en $z + dz$ y la perturbación en z a tiempo t :

$$\Delta l = \psi(t, z + dz) - \psi(t, z)$$

Usando la definición de derivada parcial, podemos escribir lo anterior como:

$$\Delta l = \frac{\partial \psi}{\partial z}(t, z) dz$$

Sustituyendo en la ecuación 4.4.1, obtenemos:

$$F(t, z) = AE \frac{\frac{\partial \psi}{\partial z}(t, z) dz}{dz} = AE \frac{\partial \psi}{\partial z}(t, z) \quad (4.4.2)$$

que es la fuerza que actúa sobre la «tapa izquierda» de nuestro segmento cilíndrico.

Ahora bien, la fuerza neta que actúa sobre el centro de masas de nuestro segmento cilíndrico será:

$$F_{\text{neta}} = F(t, z + dz) - F(t, z)$$

De nuevo, podemos escribir lo anterior a través de la definición de derivada parcial como:

$$F_{\text{neta}} = \frac{\partial F}{\partial z}(t, z) dz$$

Derivando en la ecuación 4.4.2 en la página anterior, podemos obtener la expresión de $\frac{\partial F}{\partial z}(t, z)$. Así:

$$F_{\text{neta}} = \frac{\partial}{\partial z} \left(AE \frac{\partial \psi}{\partial z}(t, z) \right) dz = AE \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(t, z) dz \quad (4.4.3)$$

A continuación, por la segunda ley de Newton aplicada al centro de masas de nuestro segmento cilíndrico, llegamos a:

$$F_{\text{neta}} = m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(t, z)$$

donde la masa del segmento vendrá dada por $m = \rho A dz$. Sustituyendo el valor de la masa y lo obtenido en la ecuación 4.4.3 llegamos a:

$$\begin{aligned} AE \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(t, z) dz &= \rho A dz \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(t, z) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(t, z) &= \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(t, z) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(t, z) = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(t, z) \end{aligned}$$

De esta forma, hemos llegado a una ecuación de ondas, con velocidad de propagación $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Q.E.D.

Observación 36. Nótese que la velocidad de propagación de las ondas longitudinales obtenida en la proposición 42 en la página anterior no depende de la sección del material, ni de su longitud. Únicamente depende de sus propiedades físicas. De esta forma, todo el desarrollo hecho para ondas transversales servirá también para ondas longitudinales.

Ejemplo 23. Tenemos una varilla de acero con densidad $\rho = 8000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ y $E = 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Haciendo uso de la proposición 42 en la página anterior, obtenemos una velocidad de propagación $c \approx 5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. En general, E es siempre muy grande (del orden del dato de este ejemplo). Esto hace que la velocidad de propagación de ondas longitudinales sea mucho más rápida que la velocidad de propagación de las ondas transversales. Esto se debe a que la velocidad de propagación longitudinal está relacionada con E mientras que la velocidad de propagación transversal está relacionada con la tensión.

Si la rigidez de un medio aumenta, entonces también aumenta la velocidad de propagación de las ondas longitudinales.

4.5. Ondas en una columna de gas

Proposición 43. *Sea una superficie tridimensional susceptible de asemejarse a una superficie cilíndrica de altura mucho mayor que su radio. Si su interior está lleno de un gas de densidad volúmica de masa ρ constante y con un módulo de compresibilidad κ , entonces cualquier perturbación $\psi_P(t, z)$ en la presión del gas en el interior del «tubo» satisface la ecuación de ondas:*

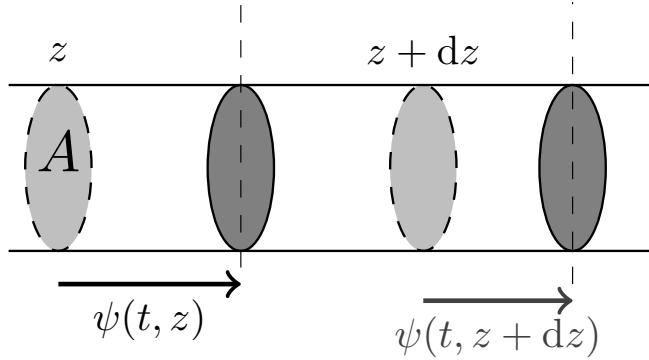
$$\frac{\partial^2 \psi_P}{\partial t^2} = \frac{1}{\kappa \rho} \frac{\partial^2 \psi_P}{\partial z^2}$$

siendo $c = \sqrt{\frac{1}{\kappa \rho}}$ la velocidad de propagación de las ondas en el gas.

Demostración. Al igual que en la demostración de la proposición 42 en la página 177 vamos a considerar un segmento cilíndrico de sección A y espesor dz en un instante t . La diferencia es que ahora relacionaremos la perturbación con la fuerza a través de la ecuación de compresibilidad de un gas:

$$\psi_P(t, z) = -\frac{1}{\kappa} \frac{\Delta V}{V} \quad (4.5.1)$$

que indica la perturbación en presión existente en el extremo izquierdo de nuestro segmento cilíndrico. En nuestro caso es $V = Adz$ y ΔV vendrá dado por la resta entre el volumen tras la perturbación y el volumen en la posición de equilibrio V .



Así:

$$\begin{aligned} \Delta V &= A [z + dz + \psi(t, z + dz) - (z + \psi(t, z))] - Adz = \\ &= A [dz + \psi(t, z + dz) - \psi(t, z)] - Adz = A [\psi(t, z + dz) - \psi(t, z)] \end{aligned}$$

Podemos expresar lo anterior en función de la derivada parcial de ψ con respecto a z :

$$\Delta V = A \frac{\partial \psi}{\partial z} (t, z) dz$$

Sustituyendo en la ecuación 4.5.1, llegamos a:

$$\psi_P(t, z) = -\frac{1}{\kappa} \frac{A \frac{\partial \psi}{\partial z} (t, z) dz}{Adz} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial z} (t, z) \quad (4.5.2)$$

que, recordemos, es la perturbación en presión en la «tapa» izquierda del segmento cilíndrico.

No obstante, para poder aplicar la segunda ley de Newton, debemos deducir cuál es la variación total en presión en nuestro segmento cilíndrico. Dado que la fuerza debe ir de la zona de mayor presión a la de menor presión, será:

$$F_{\text{neta}} = A [P(t, z) - P(t, z + dz)]$$

pues así la fuerza irá en la dirección $+z$ si es $P(t, z) > P(t, z + dz)$ e irá en la dirección $-z$ si es $P(t, z) < P(t, z + dz)$. Llamando P_0 a la presión de equilibrio, obtenemos que $P(t, z) = P_0 + \psi_P(t, z)$ para todo z del cilindro. Así, tenemos:

$$F_{\text{neta}} = A [P_0 + \psi_P(t, z) - P_0 - \psi_P(t, z + dz)] = A [\psi_P(t, z) - \psi_P(t, z + dz)]$$

De nuevo, podemos expresar lo anterior en función de la derivada parcial de ψ_P con respecto a z . Así:

$$F_{\text{neta}} = -A \frac{\partial \psi_P}{\partial z} dz$$

Sustituyendo ψ_P por la expresión dada en la ecuación 4.5.2 en la página anterior, llegamos a:

$$F_{\text{neta}} = -A \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial z} (t, z) \right) dz = \frac{A}{\kappa} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} (t, z) dz$$

A continuación, aplicando la segunda ley de Newton, obtenemos:

$$\frac{A}{\kappa} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} (t, z) dz = F_{\text{neta}} = m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} (t, z)$$

donde m es la masa de nuestro segmento cilíndrico. Como $m = \rho A dz$, sustituyendo, llegamos a:

$$\frac{A}{\kappa} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} (t, z) dz = \rho A dz \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} (t, z) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} (t, z) = \frac{1}{\kappa \rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} (t, z)$$

con lo que llegamos a una ecuación de ondas para la perturbación de los desplazamientos, pero no para la perturbación en la presión. La velocidad de propagación de estas ondas es justo $c = \sqrt{\frac{1}{\kappa \rho}}$. Derivando a ambos lados en la ecuación anterior con respecto a z , llegamos a:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{\kappa \rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)$$

Suponiendo que las funciones empleadas son al menos $C^{(3)}$, por el teorema de Schwarz, podemos intercambiar el orden de derivación. Así:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \frac{1}{\kappa \rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$$

Multiplicando a ambos lados por $-\frac{1}{\kappa}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{\kappa} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) &= \frac{1}{\kappa \rho} \left(-\frac{1}{\kappa} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(-\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) &= \frac{1}{\kappa \rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(-\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Ahora, por la ecuación 4.5.2 en la página anterior, tenemos:

$$\frac{\partial^2 \psi_P}{\partial t^2} = \frac{1}{\kappa \rho} \frac{\partial^2 \psi_P}{\partial z^2}$$

Es decir, las perturbaciones en presión también se propagan como una onda y su velocidad de propagación es la misma que la de las perturbaciones en la posición de las «tapas» de los segmentos cilíndricos. Q.E.D.

4.5.1. Velocidad del sonido

En la proposición 43 en la página 178, vemos que la velocidad de propagación depende del módulo de compresibilidad del gas. Existen dos tipos de compresiones en un gas: a temperatura constante (isotermo) o sin intercambio de calor con el exterior (adiabático). Para que el proceso fuese isotermo, tendría que ser muy lento y, claramente, esto no es el caso con las ondas de sonido, por ejemplo. Las ondas sonoras cuadran mucho más con un proceso adiabático, ya que los cambios en presión son tan rápidos que no hay cambio en la temperatura media del aire. En un gas, la compresibilidad adiabática viene dada por la expresión:

$$\frac{1}{\kappa} = \gamma P$$

siendo γ el coeficiente de dilatación adiabática del gas. De esta forma, aplicando la ley de los gases ideales, obtenemos que la velocidad de propagación de una onda longitudinal en un gas debe satisfacer:

$$c^2 = \frac{1}{\kappa\rho} = \frac{\gamma P}{\rho} = \frac{\gamma nRT}{\rho V}$$

donde n es el número de moles del gas, T es su temperatura, V es su volumen, ρ es su densidad y R es la constante universal de los gases ideales. Tomando $n = \frac{m}{M}$ donde M es la masa molar, y $\rho = \frac{m}{V}$, llegamos a:

$$c^2 = \frac{\gamma RT}{M}$$

Por ejemplo, para el aire a temperatura ambiente, se tiene:

$$T = 300 \text{ K}, \gamma = 1,4, R = 8,3 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}, M = 0,029 \frac{\text{Kg}}{\text{mol}}$$

con lo que obtenemos una velocidad de propagación de:

$$c \approx 347 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Recordemos que el rango de frecuencias audible para el ser humano es 20 Hz-20 KHz. Usando la fórmula $c = \lambda\nu$, obtenemos que el rango de longitudes de onda que somos capaces de oír es 17,5 mm-17 m.

4.5.2. Ondas estacionarias en columnas de gas

Proposición 44. *Sea un tubo de radio despreciable en comparación con su longitud. Supondremos que todas las soluciones presentan dependencia armónica con respecto al tiempo. Además:*

- *Si el tubo está cerrado por ambos extremos, la solución general de la ecuación de ondas presente en la proposición 43 en la página 178 puede expresarse como la suma de infinitos modos normales:*

$$\psi_P(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\frac{\pi}{l}z\right) \cos\left(n\frac{\pi c}{l}t\right)$$

siendo l la longitud del tubo, c la velocidad de propagación y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una serie de constantes que dependen de las condiciones iniciales. Al igual que en el caso de la cuerda tensa, la frecuencia fundamental viene dada por:

$$\omega_1 = \frac{\pi c}{l}$$

y el resto de frecuencias son múltiplos de la fundamental:

$$\omega_n = n\omega_1$$

- *Si el tubo está abierto por ambos lados, la solución general de la ecuación de ondas presente en la proposición 43 en la página 178 coincide con la de una cuerda tensa (ver proposición 41 en la página 173). Es decir, la solución general es la suma de infinitos modos normales:*

$$\psi_P(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n\frac{\pi}{l}z\right) \cos\left(n\frac{\pi c}{l}t\right)$$

siendo l la longitud del tubo, c la velocidad de propagación y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una serie de constantes que dependen de las condiciones iniciales. Al igual que en el caso de la cuerda tensa, la frecuencia fundamental viene dada por:

$$\omega_1 = \frac{\pi c}{l}$$

y el resto de frecuencias son múltiplos de la fundamental:

$$\omega_n = n\omega_1$$

- Si el tubo está cerrado por un extremo (supondremos sin pérdida de generalidad que es en $z = 0$) y abierto por otro (supondremos sin pérdida de generalidad que es en $z = l$), entonces la solución general de la ecuación de ondas presente en la proposición 43 en la página 178 puede expresarse como la suma de infinitos modos normales:

$$\psi_P(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{\pi}{2l}(2n-1)z\right) \cos\left(\frac{\pi c}{2l}(2n-1)t\right)$$

Además, en este caso la frecuencia fundamental viene dada por:

$$\omega_1 = \frac{\pi c}{2l}$$

y el resto de frecuencias vienen relacionadas con la fundamental de la siguiente forma:

$$\omega_n = (2n-1)\omega_1$$

En todos los casos anteriores la perturbación en la presión $\psi_P(t, x)$ está desfasada $\frac{\pi}{2}$ respecto a la perturbación en la posición $\psi(t, x)$ de cada segmento cilíndrico. En otras palabras, donde la perturbación en presión es máxima allí la perturbación en posición es mínima y viceversa.

Demostración.

- Si el tubo está cerrado en ambos extremos, entonces en dichos puntos los segmentos cilíndricos no podrán desplazarse; luego la perturbación en la posición de los segmentos cilíndricos en los extremos del tubo debe ser nula. Formalmente, este problema coincide con el planteado en la cuerda tensa (ver proposición 41 en la página 173). De esta forma, la solución general de $\psi(t, z)$ será:

$$\psi(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(n\frac{\pi}{l}z\right) \cos\left(n\frac{\pi c}{l}t\right)$$

Para obtener la expresión de la onda de presión aplicamos la ecuación 4.5.2 en la página 179:

$$\begin{aligned} \psi_P(t, z) &= -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial z}(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{-\frac{1}{\kappa} B_n n \frac{\pi}{l}}_{=: A_n} \cos\left(n\frac{\pi}{l}z\right) \cos\left(n\frac{\pi c}{l}t\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\frac{\pi}{l}z\right) \cos\left(n\frac{\pi c}{l}t\right) \end{aligned}$$

En este caso, se hereda la frecuencia fundamental y su relación con las otras frecuencias de la solución dada en la proposición 41 en la página 173.

Nótese que entre la onda de perturbación en presión y la onda de perturbación en posición hay un desfase de justo $\frac{\pi}{2}$, pues $\cos x$ está desfasado $\frac{\pi}{2}$ con respecto a $\sin x$.

- Si el tubo está abierto en ambos extremos, entonces la presión del gas en esos puntos será (por condiciones de frontera) la que haya fuera del tubo; en otras palabras, la perturbación en presión en los extremos del tubo debe ser nula. De esta forma, nos encontramos en una situación análoga a la cuerda tensa (sólo que ahora con la onda de presión, en vez de con la de posición). De esta forma, por la proposición 41 en la página 173, la solución general de la onda de presión vendrá dada por:

$$\psi_P(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n\frac{\pi}{l}z\right) \cos\left(n\frac{\pi c}{l}t\right)$$

De nuevo, se hereda la frecuencia fundamental y su relación con las otras frecuencias de la solución dada en la proposición 41 en la página 173.

Para obtener la perturbación en posición de los segmentos cilíndricos, aplicando la ecuación 4.5.2 en la página 179 sería menester integrar:

$$\begin{aligned}\psi(t, z) &= -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial z}(t, z) \Leftrightarrow \psi(t, z) = \int -\kappa \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + C = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa A_n}{n \frac{\pi}{l}} \cos\left(n \frac{\pi}{l} z\right) \cos\left(n \frac{\pi c}{l} t\right) + C\end{aligned}$$

Dado que los valores de ψ deben situarse en un entorno simétrico del cero (por cómo se ha construido la función ψ , ver la demostración de la proposición 43 en la página 178), obtenemos que la constante de integración es nula $C = 0$.

De esta forma, vemos que justo hay un desfase de $\frac{\pi}{2}$ entre ψ y ψ_P .

- Si el tubo está abierto por un extremo y cerrado por otro, entonces la perturbación en posición debe ser nula en el extremo cerrado, mientras que la perturbación en presión debe ser nula en el extremo abierto. Trabajemos con la perturbación en posición $\psi(t, z)$. Vamos a buscar soluciones de la forma:

$$\psi(t, z) = A(z) \cos(\omega t)$$

donde $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de una variable y ω es un parámetro a determinar. Derivando, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, z) &= -\omega A(z) \sin(\omega t) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(t, z) &= -\omega^2 A(z) \cos(\omega t) \\ \frac{\partial \psi}{\partial z}(t, z) &= \frac{dA}{dz}(z) \cos(\omega t) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(t, z) &= \frac{d^2 A}{dz^2}(z) \cos(\omega t)\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de ondas (ver proposición 43 en la página 178), llegamos a:

$$-\omega^2 A(z) \cos(\omega t) = c^2 \frac{d^2 A}{dz^2}(z) \cos(\omega t)$$

Suponiendo que $\cos(\omega t)$ no se anula, llegamos a:

$$-\omega^2 A(z) = c^2 \frac{d^2 A}{dz^2}(z) \Leftrightarrow -\frac{\omega^2}{c^2} A(z) = \frac{d^2 A}{dz^2}(z) \Leftrightarrow \frac{d^2 A}{dz^2}(z) + \frac{\omega^2}{c^2} A(z) = 0$$

que es la ecuación diferencial de un oscilador armónico simple. Llamando:

$$k^2 := \frac{\omega^2}{c^2} \Leftrightarrow k = \frac{\omega}{c} \quad (4.5.3)$$

la solución general de la ecuación diferencial anterior es:

$$A(z) = a \cos(kz) + b \sin(kz)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes que dependen de las condiciones iniciales. De esta forma, por ahora, nuestra solución tiene la forma:

$$\psi(t, z) = [a \cos(kz) + b \sin(kz)] \cos(\omega t)$$

Aplicando la ecuación 4.5.2 en la página 179, podemos obtener la onda en presión:

$$\begin{aligned}\psi_P(t, z) &= \psi_P(t, z) = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial z}(t, z) = \\ &= -\frac{1}{\kappa} [-ka \operatorname{sen}(kz) + bk \cos(kz)] \cos(\omega t) = \\ &= \frac{1}{\kappa} [ka \operatorname{sen}(kz) - bk \cos(kz)] \cos(\omega t)\end{aligned}$$

A continuación imponemos las condiciones mencionadas anteriormente:

$$\psi(t, 0) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a \cos(k \cdot 0) + b \operatorname{sen}(k \cdot 0) = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$\psi_P(t, l) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow ka \operatorname{sen}(kl) - bk \cos(kl) = 0$$

Como es $a = 0$ por la primera ecuación, la segunda ecuación se reduce a:

$$\begin{aligned}bk \cos(kl) &= 0 \Leftrightarrow kl = -\frac{\pi}{2} + n\pi \quad \forall n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow kl = \frac{\pi}{2}(2n - 1) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = \frac{\pi}{2l}(2n - 1) \quad \forall n \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Como es $\cos x = \cos(-x)$, podemos escoger $k > 0$, de forma que será $n > 0$. De esta forma, teniendo en cuenta la ecuación 4.5.3 en la página anterior, nuestra solución adquiere la forma:

$$\begin{aligned}\psi_P(t, z) &= -\underbrace{\frac{1}{\kappa} b \frac{\pi}{2l} (2n - 1)}_{=: A_n} \cos\left(\frac{\pi}{2l} (2n - 1) z\right) \cos\left(\frac{\pi c}{2l} (2n - 1) t\right) = \\ &= A_n \cos\left(\frac{\pi}{2l} (2n - 1) z\right) \cos\left(\frac{\pi c}{2l} (2n - 1) t\right)\end{aligned}$$

donde será A_n necesariamente positiva.

Ahora bien, como $\{\cos(\frac{\pi}{2l}(2n - 1)z) \cos(\omega t)\}_{n=1}^{\infty}$ son linealmente independientes entre sí, la solución general vendrá dada por una combinación lineal infinita de ellas; o sea, la solución general de la perturbación en presión queda:

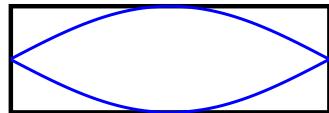
$$\psi_P(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{\pi}{2l} (2n - 1) z\right) \cos\left(\frac{\pi c}{2l} (2n - 1) t\right)$$

Por último, en este caso, también, la perturbación en presión y la perturbación en posición de los segmentos cilíndricos está desfasada $\frac{\pi}{2}$, por el mismo razonamiento hecho anteriormente en los otros dos apartados.

Q.E.D.

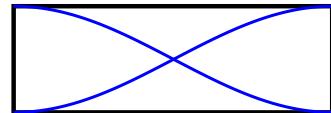
Observación 37. Los modos fundamentales de las perturbaciones en presión, en el caso de ambos extremos del tubo cerrados, tienen la siguiente forma:

$$\psi(x, t) \propto \sin(kx)$$

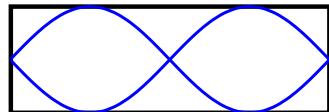


$$\psi_p(x, t) \propto \cos(kx)$$

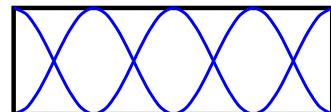
$$\lambda = 2L$$



$$\lambda = L$$



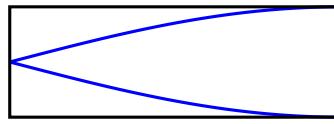
$$\lambda = \frac{2}{3}L$$



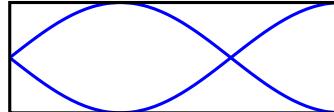
Sin embargo, en el caso de un tubo abierto por un extremo y cerrado por el otro, obtenemos:

$$\psi(x, t)$$

$$\lambda_1 = 4L$$



$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{3}$$



$$\xleftarrow{\hspace{2cm}} L \xrightarrow{\hspace{2cm}}$$

4.6. Propagación de energía en cuerdas

Definición 30. Llamamos **potencia** de una onda en un punto a la función: $P : \mathbb{R} \times C \xrightarrow{(t, x)} \mathbb{R}$ (donde C denotamos al conjunto de puntos de la cuerda) a menos la (única) primitiva con constante de integración nula de la variación con respecto al tiempo de la densidad de energía por unidad de longitud dada en el corolario 24 en la página 169:

$$P(t, x) := -F \frac{\partial y}{\partial x}(t, x) \frac{\partial y}{\partial t}(t, x)$$

siendo F la tensión de la cuerda.

Observación 38. Con la definición 30 en la página anterior, calcular el flujo neto de energía entre dos puntos x_1 y x_2 en un instante t consiste únicamente en hacer la resta de las potencias:

$$\text{Flujo de energía } (t, x_1, x_2) = P(t, x_2) - P(t, x_1)$$

Proposición 45. Consideremos una onda viajera (una perturbación que puede ser escrita a través de la ecuación $y(t, x) = f(x \mp ct)$, donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de una variable). La densidad de energía cinética por unidad de longitud \mathcal{T} y la densidad de energía potencial por unidad de longitud \mathcal{V} coinciden en todo punto y todo instante temporal:

$$\mathcal{V}(t, x) = \mathcal{T}(t, x) \quad \forall t \in \mathbb{R} \wedge \forall x \in C$$

donde con C denotamos el conjunto de puntos de la cuerda. Por tanto, se satisface la relación:

$$\mathcal{E}(t, x) = 2\mathcal{V}(t, x) = 2\mathcal{T}(t, x) \quad \forall t \in \mathbb{R} \wedge \forall x \in C$$

donde \mathcal{E} es la densidad de energía mecánica por unidad de longitud. Por último, la potencia viene dada por la expresión:

$$P(t, x) = \pm c\mathcal{E}$$

Es decir, el flujo de energía es positivo si la onda se propaga de izquierda a derecha y negativo en caso contrario.

Demostración. Sabemos que las densidades de energía cinética y potencial vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{2}F \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \\ \mathcal{T} &= \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \end{aligned}$$

donde μ es la densidad de masa por unidad de longitud. Como en nuestro caso es:

$$y(t, x) = f(x \mp ct)$$

Considerando que f es una función de ξ , derivando, tenemos:

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t, x) = \frac{df}{d\xi}(x \mp ct)(\mp c) = \mp c \frac{df}{d\xi}(x \mp ct) \quad (4.6.1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(t, x) = \frac{df}{d\xi}(x \mp ct) \quad (4.6.2)$$

Sustituyendo, las densidades de energía potencial y de energía cinética por unidad de longitud quedan:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{2}F \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 \\ \mathcal{T} &= \frac{1}{2}\mu \left(\mp c \frac{df}{d\xi} \right)^2 = \frac{1}{2}\mu c^2 \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 \end{aligned}$$

Por la proposición 39 en la página 168, es $c^2 = \frac{F}{\mu}$. Sustituyendo en la densidad de energía cinética por unidad de longitud, tenemos:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\mu \frac{F}{\mu} \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 = \frac{1}{2}F \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 = \mathcal{V}$$

Luego, efectivamente, se da $\mathcal{T} = \mathcal{V}$. Por definición de densidad de energía mecánica por unidad de longitud, tenemos:

$$\mathcal{E} = \mathcal{T} + \mathcal{V} = 2\mathcal{T} = 2\mathcal{V} = F \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 \quad (4.6.3)$$

dado que es $\mathcal{T} = \mathcal{V}$.

Por último, por la definición 45 en la página anterior, tenemos:

$$P = -F \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t}$$

y sustituyendo por los valores obtenidos en las ecuaciones 4.6.1 en la página anterior y 4.6.2 en la página anterior, obtenemos:

$$P = -F \left(\frac{df}{d\xi} \right) \left(\mp c \frac{df}{d\xi} \right) = \pm c F \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 = \pm c \mathcal{E}$$

donde el último paso se debe a la ecuación 4.6.3.

Q.E.D.

Proposición 46. Consideremos una onda viajera armónica:

$$y(t, x) = A \cos(\omega t - kx)$$

Tanto la densidad de energía mecánica \mathcal{E} como la potencia P se propagan como una onda (es decir, satisfacen la misma ecuación de ondas que $y(t, x)$). Además, la potencia media viene dada por la expresión:

$$\langle P \rangle = c \langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{2} \mu c A^2 \omega^2$$

donde \mathcal{E} es la densidad de energía mecánica por unidad de longitud.

Demostración. Por la proposición 45 en la página anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= 2\mathcal{T} = 2 \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \mu \left(\frac{\partial}{\partial t} [A \cos(\omega t - kx)] \right)^2 = \\ &= \mu (-A\omega \sin(\omega t - kx))^2 = \mu A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

Ahora, comprobemos que \mathcal{E} satisface la ecuación de ondas dada en la proposición 39 en la página 168. Para ello, derivamos:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \mu A^2 \omega^2 2 \sin(\omega t - kx) \cos(\omega t - kx) \omega = \mu A^2 \omega^3 \sin(2[\omega t - kx])$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = \mu A^2 \omega^3 \cos(2[\omega t - kx]) 2\omega = 2\mu A^2 \omega^4 \cos(2[\omega t - kx])$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = \mu A^2 \omega^2 2 \sin(\omega t - kx) \cos(\omega t - kx) (-k) = -\mu k A^2 \omega^2 \sin(2[\omega t - kx])$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} = -\mu k A^2 \omega^2 \cos(2[\omega t - kx]) (-2k) = 2\mu k^2 A^2 \omega^2 \cos(2[\omega t - kx])$$

Estudiemos el cociente:

$$\frac{\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}}{\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2}} = \frac{2\mu A^2 \omega^4 \cos(2[\omega t - kx])}{2\mu k^2 A^2 \omega^2 \cos(2[\omega t - kx])} = \frac{\omega^2}{k^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{\omega^2}{k^2}}_{=c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2}$$

Como, además, era $c^2 = \frac{F}{\mu}$, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2}$$

de forma que llegamos a la misma ecuación de ondas que cumple la función $y(t, x)$ (ver proposición 39 en la página 168).

A continuación, multiplicando a ambos lados por la velocidad de propagación c , obtenemos:

$$c \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = c \frac{F}{\mu} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 (c\mathcal{E})}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu} \frac{\partial^2 (c\mathcal{E})}{\partial x^2}$$

Por la proposición 45 en la página 186 es $P = c\mathcal{E}$ (pues en nuestro caso la onda se propaga en el sentido positivo del eje X). Así:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

y, por ende, la potencia también satisface la ecuación de ondas planteada en la proposición 39 en la página 168.

Por último, por la proposición 45 en la página 186 haciendo uso de la ecuación 4.6.4 en la página anterior, llegamos a:

$$P = c\mathcal{E} = c\mu A^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t - kx)$$

A continuación, hagamos el promedio a un periodo de la función $\operatorname{sen}^2 \xi$ siendo $\xi = \omega t - kx$.

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \langle \mu c A^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t - kx) \rangle = \mu c A^2 \omega^2 \langle \operatorname{sen}^2(\omega t - kx) \rangle = \\ &= \mu c A^2 \omega^2 \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{sen}^2 \xi d\xi}_{= \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mu c A^2 \omega^2 \end{aligned}$$

Q.E.D.

Proposición 47. Consideremos una onda estacionaria armónica (un modo normal) en una cuerda tensa:

$$y(t, x) = A \operatorname{sen}(kx) \cos(\omega t)$$

Se cumple la igualdad:

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{4} \mu A^2 \omega^2$$

donde con $\langle \rangle$ indicamos el promedio temporal y \mathcal{E} representa la densidad de energía mecánica por unidad de longitud. La igualdad sin el promedio temporal no es cierta.

Demostración. Calculemos las densidades de energía cinética y de energía potencial por unidad de longitud:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial}{\partial t} [A \operatorname{sen}(kx) \cos(\omega t)] \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \mu (A \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(\omega t) (-\omega))^2 = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2(kx) \operatorname{sen}^2(\omega t) \\ \mathcal{V} &= \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial}{\partial x} [A \operatorname{sen}(kx) \cos(\omega t)] \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} F (A \cos(kx) k \cos(\omega t))^2 = \frac{1}{2} F A^2 k^2 \cos^2(kx) \cos^2(\omega t) \end{aligned}$$

Haciendo los promedios temporales (recordando $\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \xi d\xi = \frac{1}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \xi d\xi$), se tiene:

$$\langle \mathcal{T} \rangle = \frac{1}{4} \mu A^2 \omega^2 \sin^2(kx)$$

$$\langle \mathcal{V} \rangle = \frac{1}{4} F A^2 k^2 \cos^2(kx)$$

Por la ecuación 4.3.1 en la página 173 es $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ y por la proposición 39 en la página 168 es $\frac{F}{\mu} = c^2 \Leftrightarrow F = \mu c^2$. Sustituyendo, se tiene:

$$\langle \mathcal{V} \rangle = \frac{1}{4} \mu c^2 A^2 \frac{\omega^2}{c^2} \cos^2(kx) = \frac{1}{4} \mu A^2 \omega^2 \cos^2(kx)$$

Por último, sumando $\langle \mathcal{T} \rangle$ y $\langle \mathcal{V} \rangle$ obtenemos el promedio temporal de la densidad de energía mecánica por unidad de longitud $\langle \mathcal{E} \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E} \rangle &= \langle \mathcal{T} \rangle + \langle \mathcal{V} \rangle = \frac{1}{4} \mu A^2 \omega^2 \sin^2(kx) + \frac{1}{4} \mu A^2 \omega^2 \cos^2(kx) = \\ &= \frac{1}{4} \mu A^2 \omega^2 \end{aligned}$$

Q.E.D.

4.7. Problemas

Ejercicio 17 (Problema 4.7). La cuerda un de un violín tiene una masa por unidad de longitud de $4,0 \cdot 10^{-4} [\text{kg/m}]$, y se afina a una frecuencia de $660 [\text{Hz}]$. Si la longitud de la cuerda es de $0,33 [\text{m}]$, calcula la tensión de la cuerda cuando está afinada.

Solución. En un violín, los dos extremos de la cuerda permanecen fijos, por lo tanto, en sus diferentes modos fundamentales, la longitud de onda de las vibraciones en la cuerda vendrá dada por la relación:

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

A su vez, conocemos que la relación entre la velocidad de propagación de la onda y la frecuencia de la misma:

$$v = \lambda f$$

Debido a que la cuerda es un medio continuo y elástico, la velocidad de propagación en la cuerda vendrá determinada por la densidad lineal de masa y la tensión a la que se encuentra sometida, siendo esta expresión:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

A partir de estas tres expresiones podemos deducir una relación entre los datos ofrecidos en el enunciado y la tensión a la que se encuentra sometida la cuerda:

$$\sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{2L}{n} f \rightarrow F = \mu \left(\frac{2L}{n} \right)^2 f^2$$

Sustituyendo en esta expresión los datos ofrecidos por el enunciado, obtendremos que la tensión de la cuerda será:

$$F = (4,0 \cdot 10^{-4}) \left[\frac{2(0,33)}{n} \right]^2 (660)^2 \approx \frac{75,90}{n} [\text{N}]$$

Suponiendo que la cuerda se encuentra vibrando en su armónico fundamental, tendremos un valor de $n = 1$, haciendo que la tensión de la cuerda sea:

$$F \approx 75,90 [\text{N}]$$

Q.E.F.

Capítulo 5

Relatividad especial

5.1. Introducción

La Mecánica Clásica se basa en la dinámica de Newton, que vio la luz con el «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» en el año 1687. Desde su publicación hasta finales del siglo XIX, la Mecánica Clásica fue capaz de explicar con éxito todos los problemas planteados. En todas las situaciones en las que parecía que la mecánica clásica fallaba, poco después se descubría que había un factor (que complicaba la teoría) que no se había tenido en cuenta y, tras tenerlo en cuenta, la mecánica clásica se cumplía. De esta forma, los físicos adquirieron tanta confianza en la mecánica de Newton que todo el resto de teorías de la física se desarrollaron mediante símiles mecánicos.

Fruto de estas teorías, surgieron las ecuaciones de Maxwell a finales del siglo XIX, así como el concepto de «campo» de Faraday. Como sabemos, existe una solución ondulatoria de las ecuaciones de Maxwell, cuya velocidad de propagación en el vacío es:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Por otra parte, también en el siglo XIX, Foucault llevó a cabo una medición de la velocidad de la luz y constató que su resultado coincidía bastante bien con la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas. De este hecho se dedujo que la luz era una onda electromagnética.

Pero aceptar que la luz era una onda electromagnética planteaba otros problemas para la física de la época: En el siglo XIX se pensaba que toda onda necesitaba un medio para propagarse. Por ello, necesariamente debía existir una sustancia que impregnase todo el universo conocido para que fuese posible la propagación de la luz. A esta sustancia se la llamó «éter».

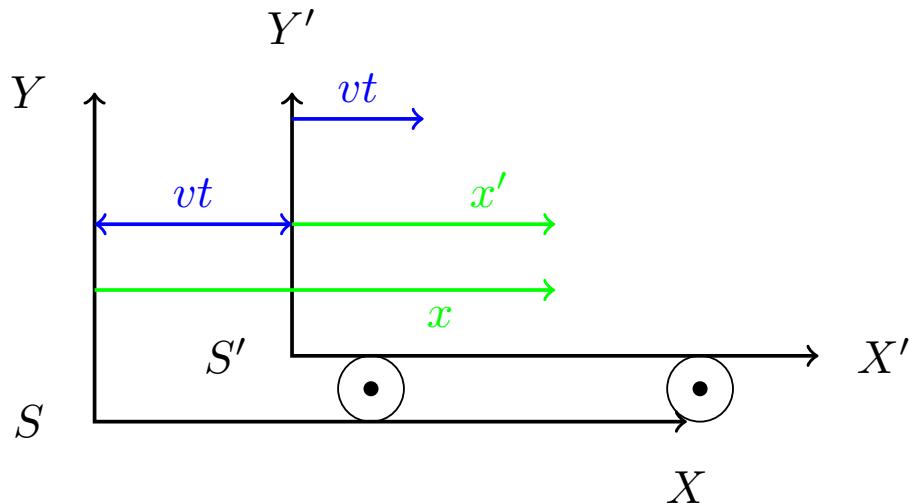
Siguiendo el símil con las ondas mecánicas, se dedujo que como c era muy alta, el éter debería tener un módulo de Young muy alto y una densidad muy baja. Esto, planteaba, a su vez, más complicaciones por lo siguiente: Si el éter impregnaba todo el universo, por muy baja que fuese su densidad volumétrica de masa, éste tendría que interaccionar gravitatoriamente con la materia y, a través de dicha interacción, tendríamos que haber sido capaces de detectar indirectamente su presencia; pero nunca se había tenido constancia de este hecho. Es decir, parecía que es $\rho = 0$.

Además de todo lo anterior, la existencia del éter significaba que éste sería un sistema de referencia absoluto, pues en él la velocidad de la luz sería siempre c , mientras que en el resto de sistemas de referencia dicha velocidad variaría. A finales del siglo XIX y principios del XX se empezaron a diseñar unos experimentos para poder estudiar la existencia del éter.

En este contexto histórico es donde apareció la Teoría de la Relatividad Especial de Einstein (publicada en 1905), que se centra en sistemas en los que no interviene la gravedad. Diez años después, Einstein publicaría la Relatividad General (1915), que ya tendría en cuenta efectos gravitatorios.

5.1.1. Transformación de Galileo unidimensional

En física clásica, suponemos que el espacio y el tiempo están separados, que son independientes. Es decir, suponemos que el tiempo es absoluto y que, simplemente, fluye. Consideremos dos sistemas de referencia, uno quieto y otro que se desplaza en el eje X respecto al primero con velocidad v . Suponemos que en $t = 0$, el origen de ambos sistemas de referencia coincide $O \equiv O'$.



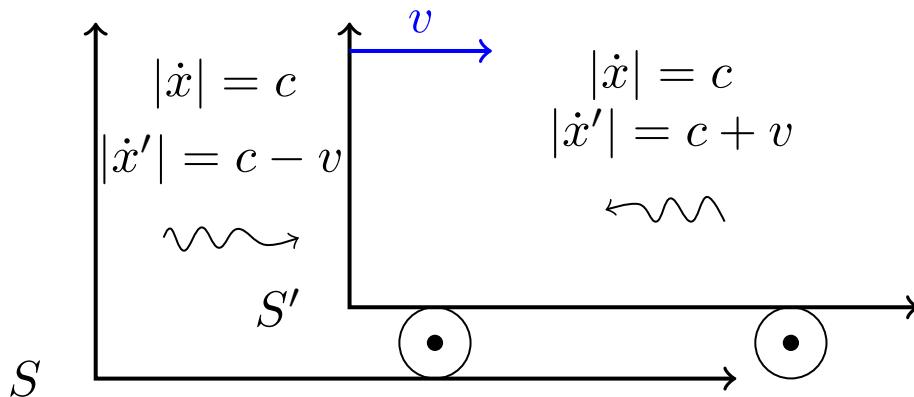
Podemos ver esta situación de la siguiente manera. Tenemos un observador estático que está parado en el andén de una estación y otro observador que está en un tren que se mueve con velocidad v en el sentido positivo del eje X . Supongamos que existe una partícula que está en una posición x' según O' y x según O . Trivialmente, a través del dibujo, obtenemos la siguiente transformación de coordenadas entre O y O' :

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Además, derivando obtenemos la relación entre velocidades:

$$\begin{cases} \dot{x}' = \dot{x} - v \\ \dot{y}' = \dot{y} \\ \dot{z}' = \dot{z} \end{cases}$$

A continuación, imaginemos dos rayos de luz viajando en direcciones opuestas tales que el observador O ve a ambos moverse con una velocidad c .



Sin embargo, el observador O' vería a los rayos moverse con diferente velocidad: vería un rayo con velocidad $v + c$ y otro con velocidad $v - c$. De esta forma, si la transformación de Galileo es cierta, las leyes de Maxwell únicamente se cumplen para el observador O , pero no para O' . En otras palabras, el observador O sería un sistema de referencia privilegiado (el del éter).

5.1.1.1. Invarianza galileana de las leyes de Newton

Las leyes de Newton están íntimamente unidas a la transformación de Galileo, porque las leyes de Newton son invariantes respecto a transformaciones de Galileo. Vamos a ver esto con algo más de detalle:

Supongamos que tenemos un sistema de referencia S , donde sabemos que se cumple la segunda ley de Newton. Ahora consideremos un sistema S' que se mueve a velocidad constante v con respecto a S ; queremos ver si también se satisface $\vec{F} = m\vec{a}$ para el sistema S' . Claramente, S y S' medirán la misma masa $m = m'$. Vamos con la aceleración:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \Rightarrow \dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} - \vec{v} \Rightarrow \ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}}$$

luego ambas aceleraciones son iguales. De esta forma, obtenemos:

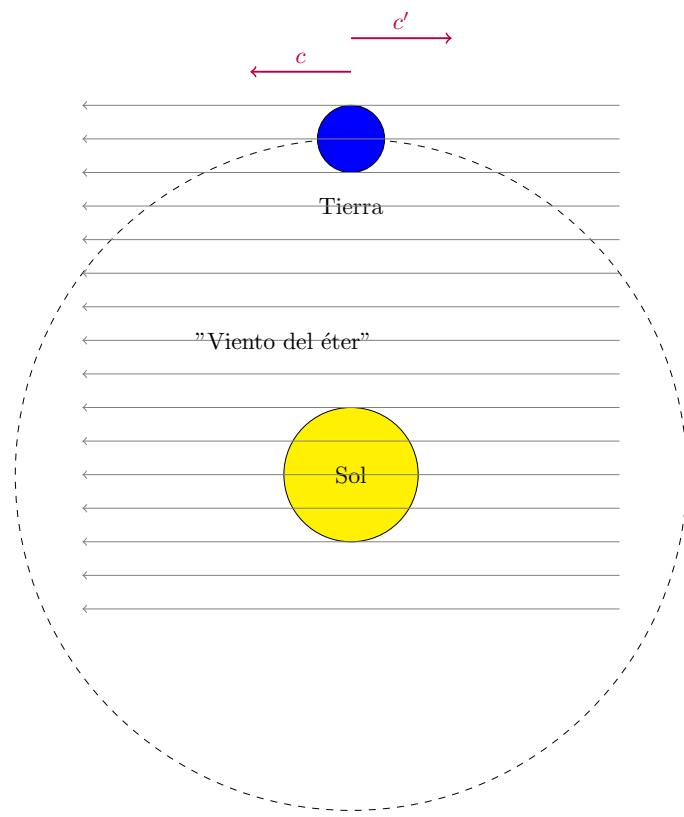
$$\vec{F}' = m'\ddot{\vec{r}}' = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Es decir, la segunda ley de Newton no cambia bajo transformaciones de Galileo; dicho de forma más técnica, la segunda ley de Newton es invariante bajo la transformación de Galileo. Esto implica que ningún experimento clásico es capaz de discernir entre un sistema de referencia que se encuentre quieto y un sistema de referencia en movimiento a velocidad constante.

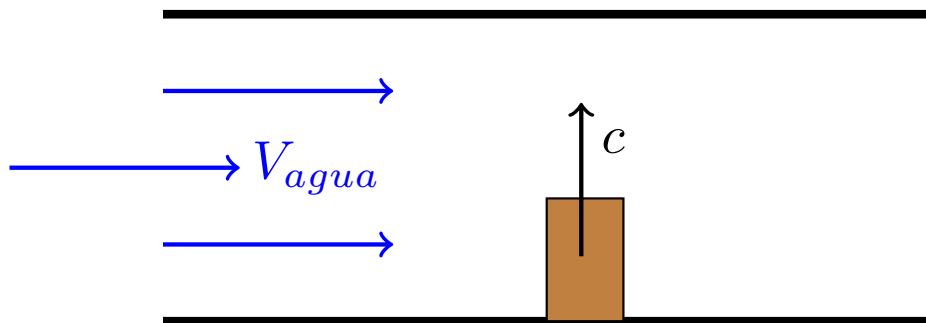
Por tanto, esto les planteaba a los físicos de finales del siglo XIX el siguiente problema: echar por tierra la transformación de Galileo significaba también echar por tierra las leyes de Newton. Por eso, a muchos físicos les parecía más razonable que existiera el éter y que las ecuaciones de Maxwell únicamente fueran válidas en un sistema de referencia, el del éter.

5.1.1.2. Experimento de Michelson-Morley

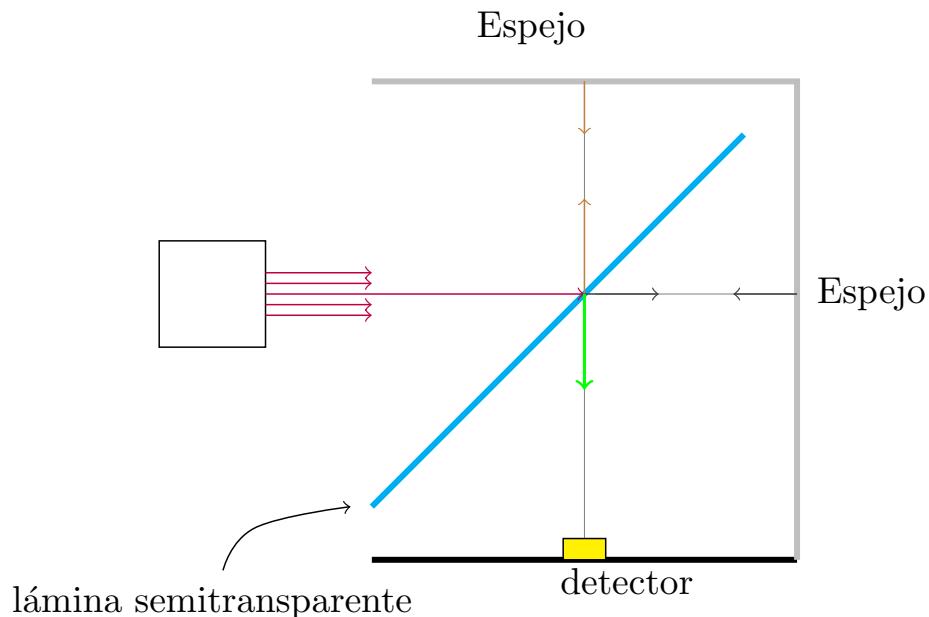
Este experimento tuvo lugar en 1887 en Estados Unidos. El objetivo de este experimento era comprobar la existencia del éter. La premisa era que existía el éter y que era un sistema de referencia privilegiado; es decir, que él está en reposo absoluto y todo lo demás se mueve con respecto al éter. La idea para su detección es que en ciertos procesos debería existir un «viento aparente de éter».



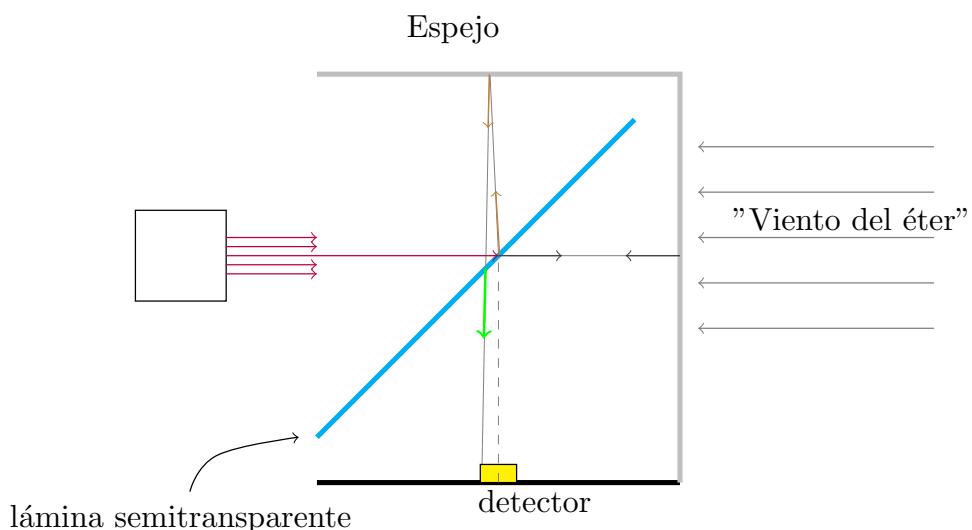
Por ejemplo, si la Tierra se encuentra justo en el punto de la órbita en el que la trayectoria de la Tierra es paralela al flujo del éter, al disparar un rayo de luz en direcciones opuestas, deberían observarse diferencias en la velocidad de propagación. La situación es análoga a una barca que intenta cruzar de una orilla a otra de un río:



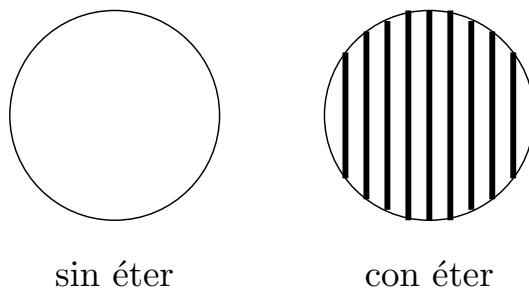
Para la realización de este experimento, se hizo uso del interferómetro de Michelson. Éste consiste en una lámina semitransparente posicionada a 45° con respecto a la luz procedente de una fuente. Detrás de la lámina, en la dirección de reflexión y en la dirección de transmisión, hay un espejo. Detrás del lado restante del espejo, se encuentra un detector. Es decir, se da el siguiente esquema:



Si el éter no existiese, entonces la trayectoria que seguiría la luz sería justo la descrita en la ilustración anterior. Sin embargo, si existe un cierto «viento del éter», cuando los rayos de luz se desplacen en vertical (según el dibujo) se verán desplazados lateralmente por el viento del éter y llegarán al detector en otro lugar.



En resumen, como la fuente de luz utilizada no sería un láser sino que lanzaría varios rayos paralelos, si existiese el éter, esperaríamos ver un cierto patrón de interferencias.



Si los dos haces fueran paralelos (no existe el viento del éter) entonces esperamos ver un patrón de interferencias homogéneo (todo blanco, todo negro, todo gris). Sin embargo, si los haces no son paralelos, esperamos ver «franjas» constructivas y destructivas. El número de franjas nos dirá precisamente el ángulo de inclinación. Es más, si ahora giramos el interferómetro un ángulo de 90° esperamos observar el mismo patrón de interferencia, intercambiando franjas constructivas y destructivas.

El resultado del experimento fue que no se apreciaba el viento del éter. Es decir, la luz parece llevar igual velocidad en las direcciones perpendiculares del interferómetro. Por tanto, da la sensación de que no existe el llamado viento del éter. A consecuencia de esto, se propusieron varias teorías que intentaban explicar el resultado, pero ninguna logró hacerlo de forma satisfactoria. Este experimento, por tanto, parece hacernos ver que no existe un sistema de referencia absoluto. Además, este experimento parece indicar que la velocidad de la luz c es independiente del movimiento de la fuente y del observador.

Este experimento se siguió repitiendo a lo largo de 30 años con la esperanza de encontrar el éter; todo fue en vano, claro.

5.2. Postulados de la Relatividad

A la vista de los resultados del experimento de Michelson-Morley, una de las siguientes situaciones debía ser cierta:

- Las ecuaciones de Maxwell no son válidas en todos los sistemas de referencia.
- Las ecuaciones de Maxwell deben tener la misma forma en todos los sistemas inerciales. Entonces, la transformación de Galileo no sería correcta.

En 1904, Lorentz encuentra matemáticamente una transformación que deja invariante las ecuaciones de Maxwell. También en 1904, Poincaré sugiere que si no hay sistemas de referencia privilegiados, entonces las leyes fundamentales de la física deberían ser las mismas en todo sistema de referencia; es decir, deberían ser invariantes. Esto es lo que se conoce como principio de la Relatividad.

En 1905, Albert Einstein publica dos artículos en los que expone su Teoría de la Relatividad Especial, en los que llega a los mismos resultados que Lorentz y Poincaré, al parecer, de forma independiente. En estos artículos Einstein establece los siguientes postulados:

Postulado 4 (Principio de la relatividad). *Las leyes de la física son invariantes bajo sistemas de referencia que se mueven con velocidad relativa constante.*

Postulado 5 (Principio de constancia de la velocidad de la luz). *La velocidad de la luz c en el vacío es la misma para todos los sistemas de referencia inerciales.*

5.3. Dilatación de tiempos

En relatividad, no vamos a hablar de puntos en el espacio, sino de sucesos que tienen lugar en una región en el espacio y en un intervalo de tiempo. Dicho de otra forma, los sucesos son espacio-temporales. A partir de ahora, siempre vamos a estar trabajando con dos observadores S y S' con una velocidad relativa entre ellos v .

Definición 31. Llamaremos coordenadas de un **suceso** según visto por un observador O a un vector $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ que refleja las coordenadas espaciales y temporales correspondientes a un evento.

Definición 32. Diremos que un observador O mide el **tiempo propio** entre dos sucesos (x_1, y_1, z_1, t_1) , (x_2, y_2, z_2, t_2) si para dicho observador O es $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$. Denotaremos el tiempo propio como $\Delta t_0 := t_2 - t_1$.

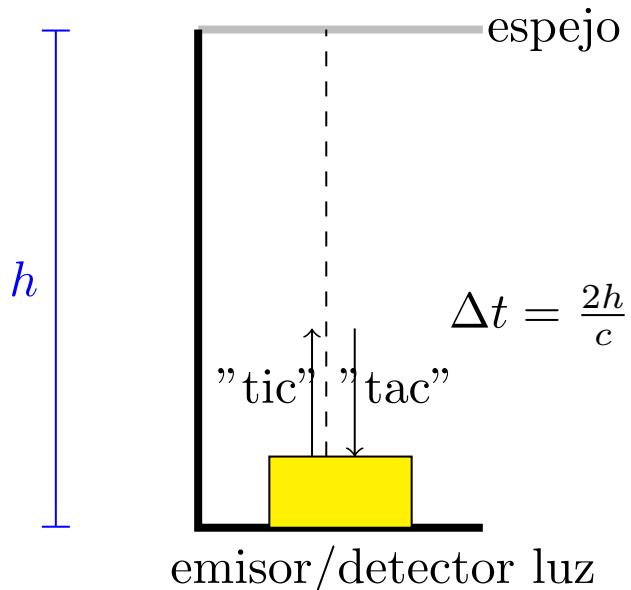
Proposición 48. *El tiempo transcurrido entre dos sucesos medidos por cualquier observador S es siempre mayor o igual al tiempo medido por el observador que mide el tiempo propio S' . Además, el tiempo medido por ambos observadores está relacionado por la expresión:*

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t_0$$

siendo v la velocidad relativa entre los observadores S y S' .

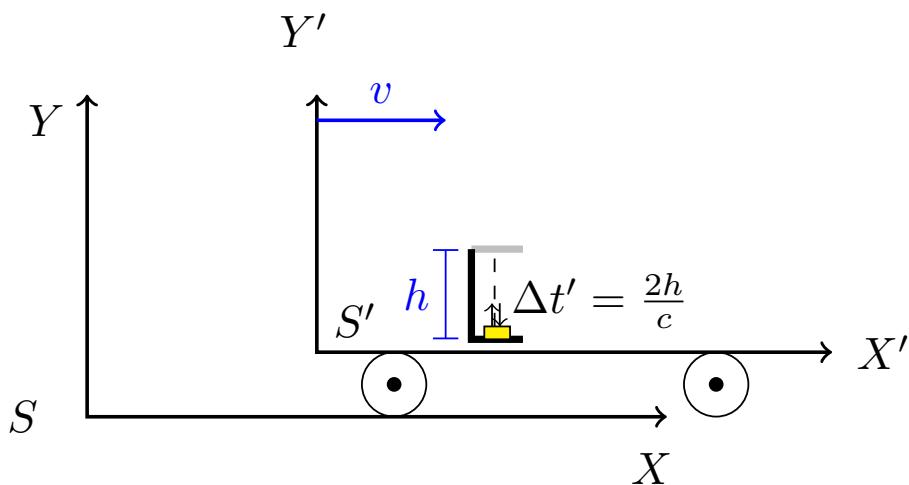
Demostración. En nuestras circunstancias actuales, no podemos estar seguros ni siquiera de cómo medimos el tiempo. Por ello, nos construimos un reloj «imaginario» que se base en la velocidad de la luz c , que no depende del observador por el postulado 5 en la página anterior. Dicho instrumento recibe el nombre de «reloj de luz» y funciona de la siguiente forma.

Reloj de luz



La fuente de luz produce un pulso de luz (suena un «tic») que se propaga a velocidad c para cualquier observador inercial. Después, el pulso de luz llega a un espejo, donde se ve reflejado y se vuelve a dirigir hacia abajo, acabando en un fotodiodo (produciéndose un «tac»). De esta forma, el observador sabe que en ese tiempo, la luz ha recorrido una distancia $2h$, siendo h la distancia entre el emisor/receptor y el espejo.

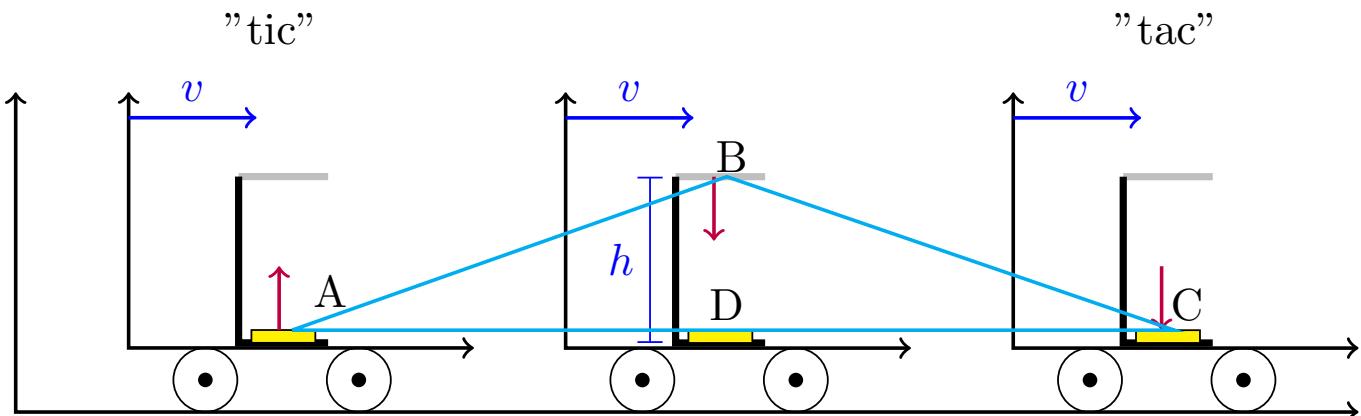
Colocamos este reloj en un vagón, donde se encuentra el observador S' , que va a medir el tiempo propio, ya que para él tanto el tic como el tac tienen lugar en la misma posición espacial.



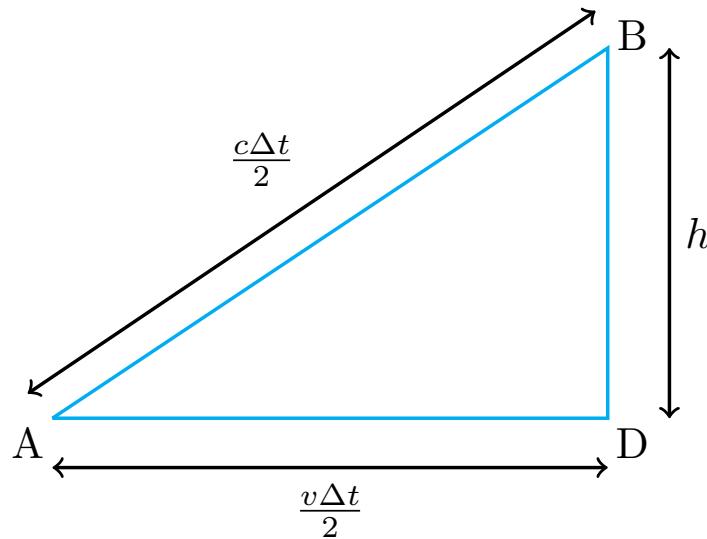
Como hemos dicho antes, para el observador S' , la distancia recorrida por cada pulso de luz del reloj será $2h$. Por el postulado 5 en la página 195, la luz ha recorrido esta distancia con velocidad c . En consecuencia, será:

$$\Delta t_0 = \Delta t' = \frac{2h}{c} \quad (5.3.1)$$

A continuación, veamos cómo ve la situación el observador S (el que está quieto en el andén). Cuando se emite el pulso de luz, para el observador S , el vagón se encuentra en una determinada posición y cuando el pulso de luz llega al techo, el vagón se ha desplazado en horizontal una cierta cantidad. Del mismo modo, cuando el pulso de luz llega al fotoreceptor, el vagón también se ha desplazado cierta distancia. Gráficamente, tenemos:



Desde el punto de vista del observador S , la luz recorre los dos catetos de un triángulo isósceles de vértices A, B, C . Llamaremos Δt al tiempo medido por S .



La altura del triángulo anterior es claramente h por la construcción del reloj de luz, mientras que la base será la distancia recorrida por el tren en un tiempo $\frac{\Delta t}{2}$. Por otra parte, por el postulado 5 en la página 195, la hipotenusa será la distancia recorrida por la luz en $\frac{\Delta t}{2}$. En consecuencia, aplicando el teorema de Pitágoras, llegamos a:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 &= h^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 \Leftrightarrow c^2 \frac{(\Delta t)^2}{4} = h^2 + v^2 \frac{(\Delta t)^2}{4} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow c^2 (\Delta t)^2 &= 4h^2 + v^2 (\Delta t)^2 \Leftrightarrow (c^2 - v^2) (\Delta t)^2 = 4h^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (\Delta t)^2 &= \frac{4h^2}{c^2 - v^2} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2h}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \\
 &= \frac{2h}{c} \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2}}} = \frac{2h}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
 \end{aligned}$$

Por la ecuación 5.3.1 en la página anterior, tenemos:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t_0$$

con lo que llegamos al enunciado. Además, el término $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ es creciente en v , y su mínimo valor se alcanza para $v = 0$, que es 1. Por tanto, siempre es $\Delta t \geq \Delta t_0$.

Q.E.D.

Corolario 27. Consideremos el tiempo transcurrido entre dos sucesos. S' mide el tiempo propio, mientras que S es otro observador cualquiera que se mueve a velocidad relativa $v \ll c$ con respecto a S' . Entonces:

$$\Delta t \approx \Delta t_0$$

De hecho, el error absoluto cometido en esta aproximación es siempre menor que $\frac{1}{2} \frac{\Delta t_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{v^2}{c^2}$.

Demostración. El resultado se obtiene al hacer un desarrollo de Taylor en $\frac{v^2}{c^2}$ a orden cero de la expresión dada en la proposición 48 en la página 196 en torno a $\frac{v^2}{c^2} = 0$. Así, tenemos:

$$\Delta t = \left(\frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)_{\frac{v^2}{c^2}=0} = \Delta t_0 \quad \text{cuando } \frac{v^2}{c^2} \rightarrow 0$$

Además, obtenemos una acotación del error cometido dada por el resto de Lagrange. Sabemos que es:

$$\left| R_1 \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \right| = \left| \left(\frac{d(\Delta t)}{d \left(\frac{v^2}{c^2} \right)} \right) (\xi) \frac{v^2}{c^2} \right|$$

para algún $\xi \in \left(0, \frac{v^2}{c^2} \right)$. Hallemos explícitamente la derivada anterior:

$$\frac{d(\Delta t)}{d \left(\frac{v^2}{c^2} \right)} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta t_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} (-1) = \frac{1}{2} \frac{\Delta t_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Así, tenemos:

$$\left| R_1 \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \right| = \frac{1}{2} \frac{\Delta t_0}{\left(1 - \xi \right)^{\frac{3}{2}}} \frac{v^2}{c^2}$$

Como la función $\frac{\Delta t_0}{(1-\xi)^{\frac{3}{2}}}$ es una función creciente en ξ , podemos acotar lo anterior por:

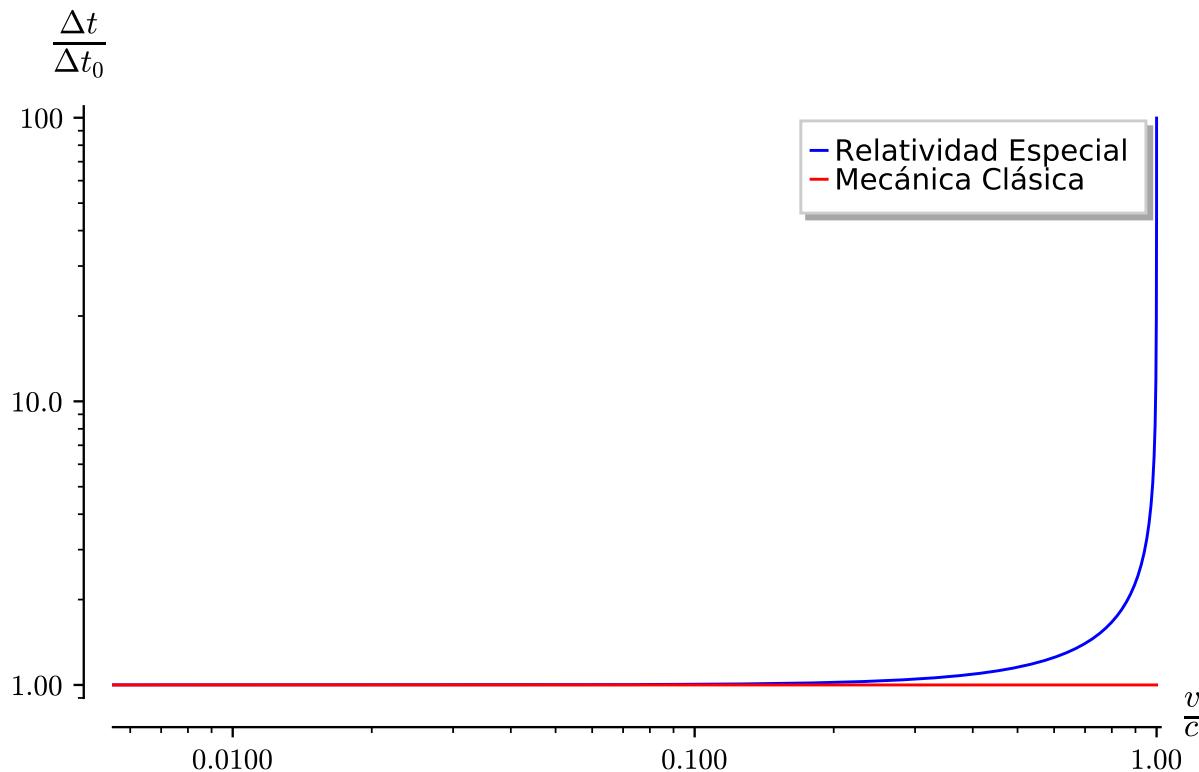
$$\left| R_1 \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \right| \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta t_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \frac{v^2}{c^2}$$

con lo que llegamos al enunciado. Q.E.D.

Observación 39. El corolario 27 en la página anterior nos dice que para velocidades $v \leq \frac{c}{10}$, el error relativo cometido al usar la transformación de Galileo es siempre aproximadamente menor del 0,5 %. Veámoslo; como la función $\frac{1}{2} \frac{\Delta t_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \frac{v^2}{c^2}$ es una función creciente en $\frac{v^2}{c^2}$, el error cometido para una velocidad inferior a $\frac{c}{10}$ será necesariamente inferior al cometido para $v = \frac{c}{10}$. Por tanto, evaluemos únicamente este caso límite. El error relativo es:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{100} \right)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{100} = \frac{1}{200} \frac{1}{\left(\frac{99}{100} \right)^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{1}{200} = 0,005$$

De hecho, la gráfica de la expresión dada en la proposición 48 en la página 196 en escala logarítmica es:



Como podemos observar, los efectos relativistas resultan completamente despreciables para velocidades inferiores a $\frac{c}{10}$, pero altamente apreciables para velocidades cercanas a la de la luz.

Ejemplo 24. Tenemos un cohete que se mueve a una velocidad $v = 300 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. con respecto de la Tierra. Llamaremos S' al observador que viaja con el cohete. S' enciende un flash en intervalos de 1 hora. ¿Cuál es el Δt medido por el observador S en la superficie de la Tierra?

En nuestro caso, el observador S' mide el tiempo propio, pues para él el cohete no se desplaza entre cada vez que enciende y apaga sus luces. Conocemos $\Delta t' = 1$ hora y tenemos:

$$\frac{v}{c} = \frac{3 \cdot 10^2}{3 \cdot 10^8} = 10^{-6}$$

De esta forma, por la proposición 48 en la página 196, el tiempo medido por el observador S en la Tierra es:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - 10^{-12}}} \approx \left(1 + \frac{1}{2} 10^{-12}\right) \text{ horas} = 1 \text{ hora} + 1,8 \text{ ns}$$

Un experimento similar a este ejercicio se ha llevado a cabo varias veces a lo largo del siglo XX. En una de estas ocasiones, se usó un reloj atómico en la Tierra, otro en un avión volando hacia el oeste y otro en un avión volando hacia el este. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

	Esperado	Experimetal
Este	-40 ns	-59 ns
Oeste	275 ns	273 ns

donde la diferencia entre los valores correspondientes a «Este» y a «Oeste» se debe a los efectos gravitatorios de la Relatividad General, que quedan fuera del alcance de este curso.

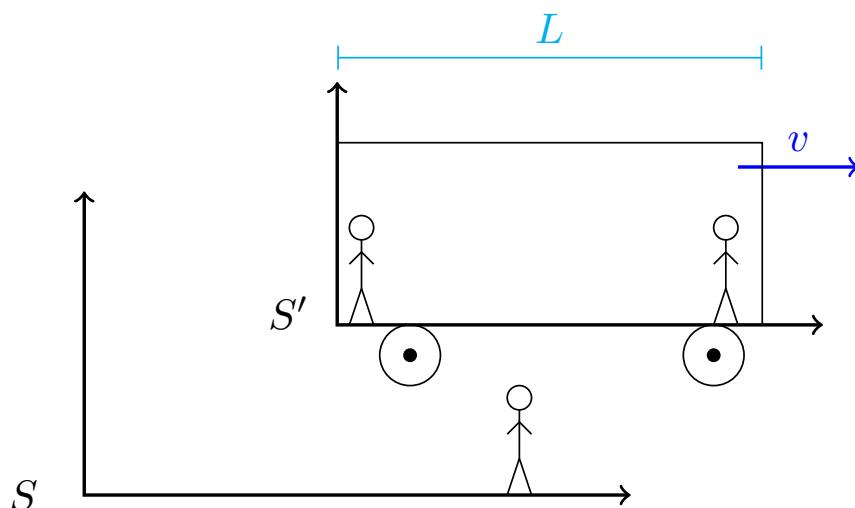
5.4. Contracción de longitudes

Definición 33. Llamaremos **longitud propia** de un objeto a la longitud medida por un observador que esté en reposo junto al objeto. Denominaremos l_0 a la longitud propia.

Proposición 49. *Sea un objeto de longitud propia l_0 y llamemos S' al observador que mide dicha longitud propia. La longitud medida por cualquier otro observador S , que se desplaza a velocidad constante v con respecto a S' , es siempre menor que la medida por S' y, además, ambas longitudes vienen relacionadas por la expresión:*

$$l = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l_0$$

Demostración. Consideremos la siguiente situación:



Vamos a medir la longitud del tren de la figura según lo ve S (desde el andén) y S' (en el tren). En nuestro caso, claramente S' mide la longitud propia del tren, pues para él el tren se encuentra en reposo.

Por otra parte, el observador S ve como pasa el tren por delante de él. Para él, la cabecera y la cola del tren pasan por delante de él en la misma posición espacial (justo delante de él), luego el observador S mide el tiempo propio transcurrido entre dichos dos sucesos (que la cabecera y que la cola pasen delante de él).

De esta forma, el observador S medirá un tiempo propio Δt_0 con el que calculará una longitud $l = v\Delta t_0$, mientras que el observador S' medirá un tiempo $\Delta t'$ con el que calculará la longitud propia $l_0 = v\Delta t'$. Por la proposición 48 en la página 196, sabemos que la relación entre Δt_0 y $\Delta t'$ satisface la expresión:

$$\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t_0$$

Sustituyendo, tenemos que:

$$l_0 = v \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t_0$$

Por otra parte, podemos expresar Δt_0 en función de la longitud medida por S : $\Delta t_0 = \frac{l}{v}$. Así, sustituyendo, llegamos a:

$$l_0 = v \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{l}{v} \Leftrightarrow l = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l_0$$

con lo que llegamos al enunciado. Por otra parte, como $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ es una función decreciente en v , la longitud medida por S será siempre menor o igual que la longitud propia l_0 . Q.E.D.

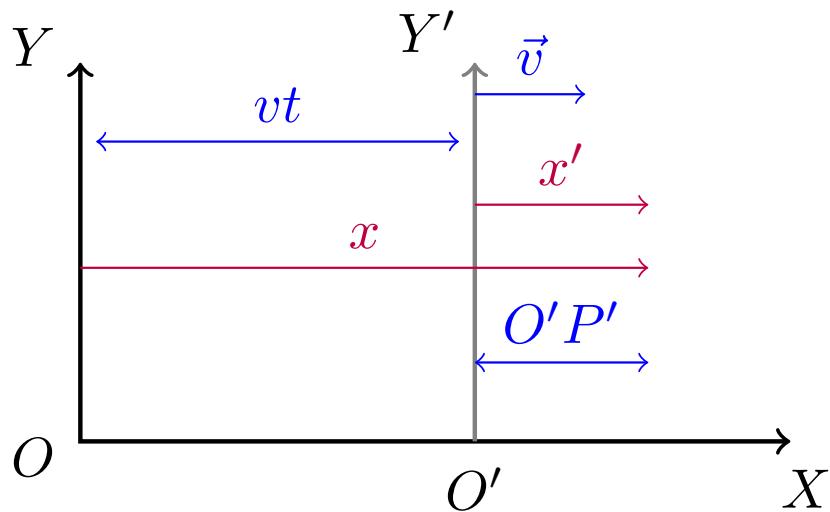
5.5. Transformación de Lorentz unidimensional

5.5.1. Transformación directa

Proposición 50 (Transformación de Lorentz). *Sean S y S' dos observadores tales que el observador S' se desplaza con una velocidad relativa v en el eje X con respecto de S . Sean (x, y, z, t) las coordenadas de un suceso según O y sean (x', y', z', t') las coordenadas del mismo suceso visto por O' . Ambos vectores de coordenadas vienen relacionados por:*

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \end{array} \right.$$

Demostración. Tenemos que dos observadores S y S' observan un suceso P' . El origen del observador S se encuentra en O , mientras que el origen del observador S' se sitúa en O' .



- Como la velocidad relativa entre ambos observadores únicamente tiene componente X es $v_y = v_z = 0$ y, por consiguiente, es $y = y'$ y $z = z'$.
- Consideremos la longitud $\overline{O'P'}$. Para el observador S :

$$\overline{O'P'} = x - vt$$

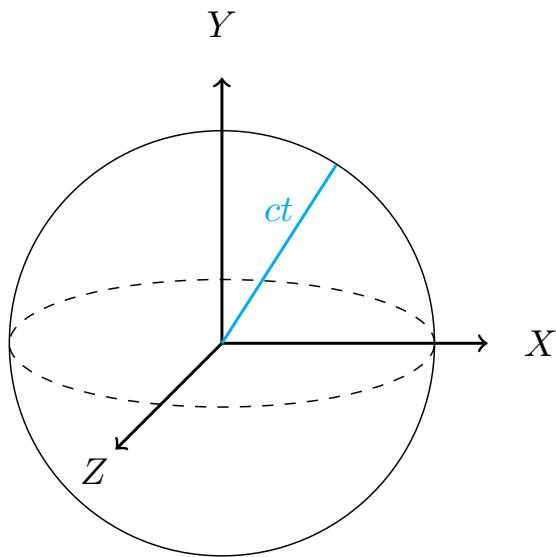
Desde S' , tenemos:

$$\overline{O'P'} = x'$$

Ahora, notemos que x' es una longitud propia para S' , ya que x' no depende de ninguna velocidad, es decir, podemos considerar que en este instante S' se encuentra en reposo con respecto a P' . De esta forma, podemos aplicar la proposición 49 en la página 201, obteniendo:

$$x - vt = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} x' \Leftrightarrow x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt) \quad (5.5.1)$$

3. Consideramos que en $t = 0$ es $t' = 0$. Conforme el tiempo progresas $t > 0$, S' se aleja con respecto a S con velocidad v a lo largo de la dirección positiva del eje X . Supongamos que en $t = 0$ se emite un pulso de luz.



El observador S ve un frente de ondas esférico de radio ct . Por el postulado 5 en la página 195, S' también verá un frente de ondas esféricas con radio ct' . Es decir, los puntos del frente de ondas describen, para ambos observadores, esferas. Para el observador S dicho frente de ondas vendrá dado por la ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

Mientras que el frente de ondas del observador S' satisface:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

Nos fijamos en el punto de corte de ambos frentes de ondas con la parte positiva del eje OX . Dichos puntos son:

$$x = ct \quad x' = ct'$$

Ahora bien, por la ecuación 5.5.1, conocemos una relación entre x y x' . De esta forma, debe ser:

$$\begin{aligned} ct' = x' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt) \Leftrightarrow t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{x}{c} - \frac{vt}{c} \right) = \\ &= t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\underbrace{\frac{xt}{ct}}_{=x} - \frac{v \overbrace{ct}^{\overline{x}}}{c^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \end{aligned}$$

De esta forma, hemos llegado al enunciado:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

Q.E.D.

Observación 40 (Simultaneidad). En física clásica, dos sucesos simultáneos para un observador S , también lo serán para otro observador S' . Sin embargo, en física relativista, lo anterior no es cierto. Consideramos dos sucesos con coordenadas (x_1, y_1, z_1, t_1) y (x_2, y_2, z_2, t_2) para el observador S tales que $t_1 = t_2$. Aplicando la transformación de Lorentz dada en la proposición 50 en la página 202, obtenemos los tiempos medidos por el observador S' :

$$t'_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t_1 - \frac{v}{c^2} x_1 \right)$$

$$t'_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t_2 - \frac{v}{c^2} x_2 \right)$$

$$t'_1 - t'_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t_1 - \frac{v}{c^2} x_1 - t_2 + \frac{v}{c^2} x_2 \right)$$

Como es $t_1 = t_2$, obtenemos:

$$t'_1 - t'_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[\frac{v}{c^2} (x_2 - x_1) \right]$$

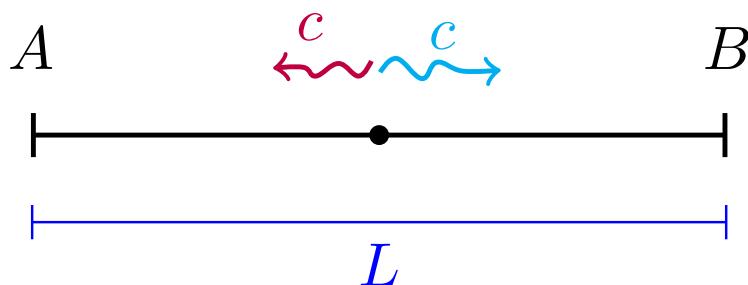
Como, en general será $x_2 \neq x_1$, tenemos que es $t'_1 \neq t'_2$. Luego, la simultaneidad no se preserva.

De hecho, en la fórmula:

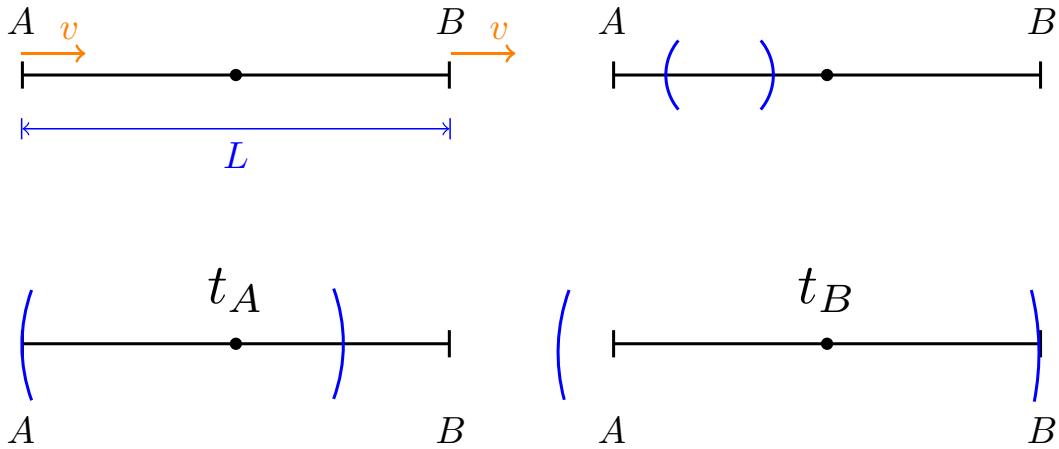
$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

el término $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ puede interpretarse como un cambio de escala y $\frac{v}{c^2}$ puede verse como un término de fase.

Ejemplo 25. Emitimos un pulso de desde el centro de un cohete.



El observador S' (el que va montado en el cohete) ve la longitud propia del cohete. Como S' ve A y B en reposo, el tiempo que tardarán ambos rayos de luz en llegar a los extremos del cohete coinciden; en otras palabras, es $t'_A = t'_B$. Sin embargo, para el observador S (que se encuentra fuera del cohete), tanto A como B llevan una cierta velocidad v .



En consecuencia, para S el frente de ondas alcanzará el punto A antes que el punto B . Es decir, es $t_A < t_B$. Por ende, la simultaneidad es un efecto relativo que depende del observador.

Proposición 51. *La transformación de Lorentz dada en la proposición 51 es una aplicación lineal.*

Demostración. Denotaremos a la transformación de Lorentz con:

$$L : \quad \mathbb{R}^4 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^4$$

$$(x, y, z, t) \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \end{cases}$$

Para ver si L es una aplicación lineal, debemos comprobar que:

$$L(\lambda(x_1, y_1, z_1, t_1) + \mu(x_2, y_2, z_2, t_2)) \stackrel{?}{=} \lambda L((x_1, y_1, z_1, t_1)) + \mu L((x_2, y_2, z_2, t_2))$$

Para ello, partiremos del lado izquierdo e intentaremos llegar al derecho:

$$\begin{aligned} L(\lambda(x_1, y_1, z_1, t_1) + \mu(x_2, y_2, z_2, t_2)) &= \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} [\lambda x_1 + \mu x_2 - v(\lambda t_1 + \mu t_2)], \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[\lambda t_1 + \mu t_2 - \frac{v(\lambda x_1 + \mu x_2)}{c^2} \right] \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} [\lambda x_1 - \lambda v t_1 + \mu x_2 - \mu v t_2], \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2, \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[\lambda t_1 - \lambda \frac{v x_1}{c^2} + \mu t_2 - \mu \frac{v x_2}{c^2} \right] \right) = \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \lambda [x_1 - v t_1], \lambda y_1, \lambda z_1, \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \lambda \left[t_1 - \frac{v x_1}{c^2} \right] \right) + \\
&\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mu [x_2 - v t_2], \mu y_2, \mu z_2, \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mu \left[t_2 - \frac{v x_2}{c^2} \right] \right) = \\
&= \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} [x_1 - v t_1], y_1, z_1, \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[t_1 - \frac{v x_1}{c^2} \right] \right) + \\
&\quad + \mu \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} [x_2 - v t_2], y_2, z_2, \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[t_2 - \frac{v x_2}{c^2} \right] \right) = \\
&= \lambda L((x_1, y_1, z_1, t_1)) + \mu L((x_2, y_2, z_2, t_2))
\end{aligned}$$

Luego, efectivamente, la transformación de Lorentz es una aplicación lineal.

Q.E.D.

5.5.2. Transformación inversa

Corolario 28 (Transformación de Lorentz inversa). *Sean S y S' dos observadores tales que el observador S' se desplaza con una velocidad relativa v en el eje X con respecto de S . Sean (x, y, z, t) las coordenadas de un suceso según O y sean (x', y', z', t') las coordenadas del mismo suceso visto por O' . Ambos vectores de coordenadas vienen relacionados por:*

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x' + v t') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \end{array} \right.$$

Demostración. Partimos de las expresiones dadas en la proposición 50 en la página 202:

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - v t) \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

Ahora, únicamente hay que despejar x en función de x' y t en función de t' . Vamos con la primera ecuación:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt) \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} x' = x - vt \Leftrightarrow x = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} x' + vt \quad (5.5.2)$$

De la última, obtenemos:

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' = t - \frac{vx}{c^2}$$

Sustituyendo x por el valor obtenido en la ecuación 5.5.2, llegamos a:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' &= t - \frac{v}{c^2} \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} x' + vt \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' = t - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{v}{c^2} x' - \frac{v^2}{c^2} t \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{v}{c^2} x' = t - \frac{v^2}{c^2} t \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) t \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo el valor obtenido de t en la ecuación 5.5.2, obtenemos:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} x' + \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) = \\ &= \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) x' + \frac{v^2}{c^2} x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Q.E.D.

Observación 41. Para obtener la transformación de Lorentz inversa (ver corolario 28 en la página anterior) a partir de la directa (ver proposición 50 en la página 202) únicamente hay que cambiar «primas» por «no primas» y v por $-v$.

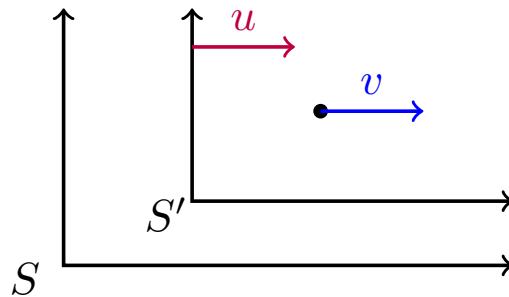
5.5.3. Transformación de velocidades unidimensional

Proposición 52 (Transformación de velocidades). *Sean dos observadores S y S' tales que el observador S' se desplaza a velocidad constante u con respecto a S en el sentido positivo del eje X . El observador S mide*

la velocidad de una partícula $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ y el observador S' mide la velocidad de la misma partícula $\vec{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)$. Ambas magnitudes están relacionadas por la expresión:

$$\begin{cases} v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \\ v'_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} v_y \\ v'_z = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} v_z \end{cases}$$

Demostración. Tenemos la siguiente situación:



El observador S mide una velocidad $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, mientras que el observador S' mide una velocidad $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$. Tomando $d\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $dt = t_2 - t_1$, $d\vec{r}' = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1$ y $dt' = t'_2 - t'_1$, como la transformación de Lorentz es lineal por la proposición 50 en la página 202, será:

$$\begin{aligned} L((d\vec{r}, dt)) &= L((\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1)) = L((x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, t_2 - t_1)) = \\ &= L((x_2, y_2, z_2, t_2)) - L((x_1, y_1, z_1, t_1)) = (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) - (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) = \\ &= (\vec{r}'_2, t'_2) - (\vec{r}'_1, t'_1) = (\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1, t'_2 - t'_1) = (d\vec{r}', dt') \end{aligned}$$

De esta forma, aplicando la transformación de Lorentz (ver proposición 50 en la página 202), tenemos que:

$$\begin{aligned} dx' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (dx - u dt) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \\ dt' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \left(dt - \frac{u}{c^2} dx \right) \end{aligned}$$

De esta forma, simplemente dividiendo, obtenemos:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (dx - u dt)}{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \left(dt - \frac{u}{c^2} dx \right)} = \frac{dx - u dt}{dt - \frac{u}{c^2} dx} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}} = \frac{\frac{dx}{dt} - u \frac{dt}{dt}}{\frac{dt}{dt} - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \\
v'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{v^2}}} (dt - \frac{u}{c^2} dx)} \frac{1}{\frac{1}{dt}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{v^2}} \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dt}{dt} - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} = \\
&= \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{v^2}}}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} v_y \\
v'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{v^2}}} (dt - \frac{u}{c^2} dx)} \frac{1}{\frac{1}{dt}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{v^2}} \frac{dz}{dt}}{\left(\frac{dt}{dt} - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} = \\
&= \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{v^2}}}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} v_z
\end{aligned}$$

Como es $dt' \neq dt$, cambian todas las componentes de la velocidad: en particular, es $v'_y \neq v_y$ y $v'_z \neq v_z$. $\mathbb{Q.E.D.}$

Corolario 29. Sean dos observadores S y S' tales que el observador S' se desplaza a velocidad constante u con respecto a S en el sentido positivo del eje X . El observador S mide la velocidad de una partícula $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ y el observador S' mide la velocidad de la misma partícula $\vec{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)$. Si es $u \ll c$, recuperamos la transformación de Galileo:

$$\begin{cases} v'_x \approx v_x \\ v'_y \approx v'_y \\ v'_z \approx v'_z \end{cases}$$

Demostración. El resultado se obtiene trivialmente al sustituir $u = 0$ en las expresiones de la proposición 52 en la página 207. $\mathbb{Q.E.D.}$

Corolario 30 (Transformación de velocidades inversa). Sean dos observadores S y S' tales que el observador S' se desplaza a velocidad constante u con respecto a S en el sentido positivo del eje X . El observador S mide la velocidad de una partícula $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ y el observador S' mide la velocidad de la misma partícula $\vec{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)$. Ambas magnitudes están relacionadas por la expresión:

$$\begin{cases} v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \\ v_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} v'_y}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \\ v_z = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} v'_z}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \end{cases}$$

Demostración. Por la proposición 52 en la página 207, se cumplen las ecuaciones:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}$$

$$v'_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} v_y$$

$$v'_z = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} v_z$$

De la primera, despejemos v_x :

$$\begin{aligned} v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} &\Leftrightarrow v'_x \left(1 - \frac{u}{c^2} v_x\right) = v_x - u \Leftrightarrow v'_x - \frac{u}{c^2} v'_x v_x = v_x - u \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v'_x + u = v_x + \frac{u}{c^2} v'_x v_x \Leftrightarrow v'_x + u = v_x \left(1 + \frac{u}{c^2} v'_x\right) \Leftrightarrow v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

Vamos con la segunda ecuación:

$$v'_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} v_y \Leftrightarrow v_y = v'_y \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{u}{c^2} v_x\right)$$

Sustituyendo el valor de v_x obtenido en la ecuación 5.5.3, obtenemos:

$$\begin{aligned} v_y &= v'_y \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{u}{c^2} \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x}\right) = \\ &= v'_y \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{u v'_x + u^2}{c^2 + u v'_x}\right) = v'_y \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{c^2 + u v'_x - u v'_x - u^2}{c^2 + u v'_x} = \\ &= v'_y \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{c^2 - u^2}{c^2 + u v'_x} = v'_y \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{c^2}{c^2} \frac{1 - \frac{u^2}{c^2}}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} = \\ &= v'_y \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} v'_y \end{aligned}$$

Actuando análogamente con la tercera ecuación, se llega al resultado. Q.E.D.

Observación 42. Para obtener la transformación de velocidades inversa (ver corolario 30 en la página anterior) a partir de la directa (ver proposición 52 en la página 207) únicamente hay que cambiar «primas» por «no primas» y u por $-u$.

Ejemplo 26. Tenemos un cohete que se mueve a velocidad $u = 0,8c$ con respecto a la Tierra. Lanzamos proyectiles hacia delante con $v' = 0,6c$ (velocidad relativa al cohete). ¿A qué velocidad se ven los proyectiles desde la Tierra?

Según la transformación clásica, obtendríamos:

$$v = v' + u = 1,4c$$

Pero esto violaría el segundo postulado de la relatividad especial. Mediante la transformación de velocidades inversa (ver corolario 30 en la página anterior), obtenemos:

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'} = \frac{0,6c + 0,8c}{1 + \frac{0,8c}{c^2} 0,6c} = \frac{0,6c + 0,8c}{1 + 0,48} = \frac{1,4}{1,48} c = \frac{140}{148} c = \frac{70}{74} c = \frac{35}{37} c \approx 0,946c$$

Q.E.F.

Ejemplo 27. El cohete del ejemplo 26 en la página anterior lanza fotones con $v' = c$. ¿Cuál es la velocidad de dichos fotones vista desde la Tierra?

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'} = \frac{c + 0,8c}{1 + \frac{c}{c^2} 0,8c} = \frac{1,8c}{1,8} = c$$

Como vemos, efectivamente, se cumple el postulado 5 en la página 195, es decir, c es invariante bajo la transformación de Lorentz.

Q.E.F.

5.6. El grupo de Lorentz

A continuación, vamos a desarrollar la transformación de Lorentz desde un punto más general. Para ello, vamos a olvidar momentáneamente todo el desarrollo hecho hasta ahora y vamos a deducir la forma de las transformaciones de Lorentz desde el punto de vista del Álgebra.

Proposición 53. *El postulado 5 en la página 195 implica que, dado un suceso de coordenadas (x, y, z, t) para un observador S que representa un «punto espacio-temporal» de un frente de ondas esférico de luz, entonces la cantidad:*

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

no depende del observador S .

Demostración. Sean dos observadores S y S' tales que el observador S' se desplaza a una velocidad constante \vec{v} con respecto a S . En $t = t' = 0$, supondremos que se emite una onda esférica de luz. Por el postulado 5 en la página 195, para ambos observadores, el frente de ondas de la luz es esférico, ya que se propaga a velocidad c en todas direcciones. Para el observador S dicho frente de ondas viene descrito por la ecuación: $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ y para S' viene descrito por $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$. De esta forma, debe ser:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 &= 0 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 &= 0 \end{aligned}$$

De esta forma, la cantidad $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ debe ser nula para cualquier observador inercial y, en consecuencia, no depende del observador.

Q.E.D.

La proposición 53 motiva la construcción de una norma (en nuestro caso, será una pseudonorma) que debe mantenerse invariante para cualquier observador. En otras palabras, si tenemos un suceso de coordenadas (x, y, z, ct) para un observador S y coordenadas (x', y', z', ct') para un observador S' , entonces, esperamos que la pseudonorma de ambos vectores sea la misma. Además, dicha pseudonorma tiene que tener la propiedad de que sea nula para todo (x, y, z, ct) perteneciente a un frente de ondas esférico de un rayo de luz. Hemos introducido el factor c multiplicando a la t para que todos los elementos de los vectores tengan las mismas unidades. Esto nos facilitará las cuentas y la definición de los conceptos más adelante. Nótese que introducirlo no afecta absolutamente en nada, más que a la definición que tendremos que dar a la pseudonorma, ya que c es una constante que no depende del observador por el postulado 5 en la página 195.

Como es bien sabido en Álgebra, construir una norma es equivalente a construir un producto escalar (en nuestro caso, será un pseudoproducto escalar). De esta forma, definimos:

Definición 34. Llamaremos **pseudoproducto escalar de Minkowski** al pseudoproducto escalar que, en base canónica, viene dado por la matriz:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observación 43. De esta forma, la pseudonorma de un suceso de coordenadas (x, y, z, ct) para un observador S sería:

$$\langle (x, y, z, ct), (x, y, z, ct) \rangle = (x \ y \ z \ ct) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

que coincide justo con la cantidad dada en la proposición 53 en la página anterior.

Proposición 54. *El pseudoproducto escalar de Minkowski es, efectivamente, un pseudoproducto escalar.*

Demostración. Para poder ser un pseudoproducto escalar deben cumplirse dos cosas: la aplicación que lo define debe ser bilineal y además, debe ser simétrica.

En nuestro caso (la definición 34 en la página anterior), la aplicación es claramente bilineal (ya que nos dan su representación matricial) y dicha matriz es claramente simétrica. Por ende, el pseudoproducto escalar de Minkowski es un pseudoproducto escalar. Q.E.D.

Definición 35. Llamaremos **espacio de Minkowski** a \mathbb{R}^4 dotado del pseudoproducto escalar descrito en la definición 34 en la página anterior.

Con todo esto, ya tenemos construido el aparato matemático necesario para dar la definición más general posible de una transformación de Lorentz.

Definición 36. Llamaremos **transformación de Lorentz** a toda isometría del espacio de Minkowski.

En otras palabras, una transformación de Lorentz es toda aplicación lineal de $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que preserva la pseudonorma que se deduce del pseudoproducto escalar de Minkowski (ver definición 34 en la página anterior).

Teorema 10. *El conjunto de todas las transformaciones de Lorentz tiene estructura de grupo respecto a la composición de aplicaciones.*

Demostración. Lo primero que debemos demostrar es que la composición de dos transformaciones de Lorentz L_1 y L_2 es también una transformación de Lorentz. Escojamos una base B cualquiera de \mathbb{R}^4 y llamemos A_{L_1} a la matriz coordenada de L_1 en base B y A_{L_2} a la matriz coordenada de L_2 en base B . Por último, llamemos Λ a la matriz que representa el pseudoproducto escalar de Minkowski (ver definición 34 en la página anterior) en la base B . Dado que L_1 y L_2 son transformaciones de Lorentz, sabemos que se verifica:

$$A_{L_1}^T \Lambda A_{L_1} = \Lambda, \quad A_{L_2}^T \Lambda A_{L_2} = \Lambda$$

(donde el superíndice T indica traspuesta) puesto que L_1 y L_2 preservan el pseudoproducto escalar de Minkowski (ver definición 34 en la página anterior). De esta forma, estudiemos si $L := L_2 \circ L_1$ es también una transformación de Lorentz. Llamaremos $A_L = A_{L_2} A_{L_1}$ a la matriz coordenada de L en base B y consideremos:

$$(A_{L_2} A_{L_1})^T \Lambda (A_{L_2} A_{L_1}) = A_{L_1}^T \underbrace{A_{L_2}^T \Lambda A_{L_2}}_{=\Lambda} A_{L_1} = A_{L_1}^T \Lambda A_{L_1} = \Lambda$$

Luego, L es una transformación de Lorentz.

A continuación, debemos comprobar que la composición de transformaciones de Lorentz es asociativa, pero esta propiedad se hereda de la composición de aplicaciones lineales.

Además, claramente la identidad id es una transformación de Lorentz, luego el elemento neutro de la composición de aplicaciones es una transformación de Lorentz.

Por tanto, únicamente queda verificar que existe la inversa de cualquier aplicación de Lorentz y que dicha inversa es otra aplicación de Lorentz. Primero probemos la existencia. Para ello, sea L una transformación de Lorentz y sea A_L su representación coordinada en una base cualquiera B de \mathbb{R}^4 , estudiemos:

$$A_L^T \Lambda A_L = \Lambda \Rightarrow \det(A_L^T \Lambda A_L) = \det \Lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \det A_L^T \det \Lambda \det A_L = \det \Lambda$$

Como es $\det \Lambda \neq 0$ (véase la definición 34 en la página 211), tenemos:

$$\det A_L^T \det A_L = 1$$

Como se da $\det A_L^T = \det A_L$, llegamos a:

$$(\det A_L)^2 = 1 \Rightarrow \det A_L \neq 0$$

luego A_L es una matriz invertible y, por consiguiente, L es una aplicación lineal invertible. Luego, la inversa de una aplicación de Lorentz siempre existe. A continuación, veamos que dicha inversa es, necesariamente, otra aplicación de Lorentz. Para ello, consideramos:

$$\begin{aligned} \Lambda = \Lambda &\Leftrightarrow (A_L A_L^{-1})^T \Lambda (A_L A_L^{-1}) = \Lambda \Leftrightarrow (A_L^{-1})^T \underbrace{A_L^T \Lambda A_L}_{=\Lambda} A_L^{-1} = \Lambda \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (A_L^{-1})^T \Lambda A_L^{-1} = \Lambda \end{aligned}$$

donde el paso marcado se debe a que L es una aplicación de Lorentz. Por consiguiente, L^{-1} también será una aplicación de Lorentz.

Recapitulando, hemos probado que la composición de dos aplicaciones de Lorentz cualesquiera es una aplicación de Lorentz, que el elemento neutro de la composición de aplicaciones también es una aplicación de Lorentz, que la composición de aplicaciones de Lorentz es asociativa, que siempre existe la inversa de una aplicación de Lorentz y que dicha inversa es otra aplicación de Lorentz. Por ende, el conjunto de todas las aplicaciones de Lorentz cumple todos los requisitos para tener estructura de grupo. Q.E.D.

Definición 37. Llamaremos **grupo de Lorentz** al grupo descrito en el teorema 10 en la página anterior.

5.6.1. Tipos de transformaciones de Lorentz

El conjunto de las transformaciones de Lorentz tiene cuatro componentes desconexas. El resto de transformaciones pueden obtenerse como composición de dos de las anteriores.

- Transformaciones **octócronas propias**: constituyen el conjunto de las transformaciones de Lorentz que tienen determinante igual a uno y que, además, satisfacen que en base canónica la componente (4, 4) de su matriz coordenada es positiva. Se pueden obtener como exponenciales de otras matrices.
- Transformaciones **octócronas impropias**: están formadas por aquellas transformaciones de Lorentz con determinante igual a menos uno y que satisfacen que en base canónica la componente (4, 4) de su matriz coordenada es positiva. Especialmente interesante de esta categoría resulta la **paridad espacial**, que representa una inversión respecto al origen de las coordenadas espaciales:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Transformaciones **no-octócronas impropias**: constituyen el conjunto de las transformaciones de Lorentz que tienen determinante igual a menos uno y cuya componente (4, 4) de su matriz coordenada en base canónica es negativa. Especialmente interesante de esta categoría resulta la **paridad temporal**, que representa una inversión en la dirección del tiempo:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Transformaciones **no-octócronas propias**: son el conjunto de transformaciones de Lorentz cuyo determinante es igual a uno y que satisfacen que la componente (4, 4) de su matriz coordenada en base canónica es negativa. Especialmente interesante de esta categoría resulta la **paridad espacio-temporal**, que constituye una inversión simultánea en las direcciones espaciales y temporales:

$$PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se puede probar que cualquier transformación de Lorentz puede escribirse como el producto de la matriz coordenada de una transformación de Lorentz octócrona propia y una de las matrices P , T o PT .

Es interesante notar que el grupo de Lorentz incluye como subgrupo al grupo de rotaciones espaciales de \mathbb{R}^3 . Estas transformaciones giran los ejes espaciales y dejan fijo el tiempo. Un ejemplo de matriz de este tipo sería:

$$L_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualmente, existen transformaciones que «rotan» en torno al eje temporal. Éstas reciben el nombre de **boosts**. Un ejemplo sencillo corresponde a la matriz:

$$B_x = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & 0 & 0 & -\operatorname{senh} \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{senh} \alpha & 0 & 0 & \cosh \alpha \end{pmatrix}$$

De hecho, la transformación presentada en la proposición 50 en la página 202 se corresponde con un boost.

5.6.2. Cuadrvectores

Definición 38. Sean S y S' dos observadores iniciales tales que el observador S' se desplaza a velocidad constante con respecto a S . Llamaremos **cuadrvector** a cualquier vector de \mathbb{R}^4 cuyas coordenadas vistas por S $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ tomen valores correspondientes a magnitudes físicas medibles por S y S' y que, además, cumplan que si \mathbf{q} son los valores medidos por S , entonces $\mathbf{q}' = L(\mathbf{q})$ son los valores medidos por S' (donde L es la transformación de Lorentz entre S y S'); es decir, \mathbf{q} y \mathbf{q}' deben estar relacionadas a través de la transformación de Lorentz que conecta S con S' .

Notación 5. En general, denotaremos los cuadrvectores en negrita \mathbf{q} para distinguirlos de los trivectores \vec{q} y de los escalares q .

Corolario 31. *Las coordenadas de un suceso (multiplicando el tiempo por c) para un observador S : $\mathbf{r} = (\vec{r}, ct) = (x, y, z, ct)$ son un cuadrvector.*

Demostración. La demostración es trivial a partir de la definición de suceso (ver definición 31 en la página 195) y la de cuadrvector (ver definición 38). Q.E.D.

Definición 39. Llamaremos **cuadriposición** al cuadrvector que describe un suceso:

$$\mathbf{r} := (\vec{r}, ct) = (x, y, z, ct)$$

A continuación, queremos definir algún concepto relacionado con la velocidad, pero que sea un cuadrivector. Si recordamos la transformación de velocidades dada en la proposición 52 en la página 207, veremos fácilmente que la transformación de velocidades no es una transformación de Lorentz. En consecuencia, el vector (\vec{v}, c) (que sería la opción más sencilla) no es un cautrivector. Por tanto, vamos a tener que recurrir a una definición distinta:

Definición 40. Llamaremos **cuadrivelocidad** \mathbf{v} al caudrivector:

$$\mathbf{v} := \frac{d\mathbf{r}}{dt_0} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt_0}, c \frac{dt}{dt_0} \right)$$

donde t_0 es el tiempo propio.

Observación 44. La cuadrivelocidad es, efectivamente, un caudrivector. Veamos por qué. Por una parte, como las transformaciones de Lorentz son lineales, $d\mathbf{r}$ «cambia» de un observador a otro del mismo modo que lo hace \mathbf{r} ; en otras palabras, $d\mathbf{r}$ es un cuadrivector. Además, como el tiempo propio t_0 no depende del observador, dt_0 tampoco lo hará. En definitiva, \mathbf{v} es el cociente entre un cuadrivector y un escalar que no depende del observador. Por consiguiente, \mathbf{v} también es un cuadrivector.

Corolario 32. *La cuadrivelocidad puede expresarse como:*

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (\vec{v}, c)$$

donde $v = |\vec{v}|$.

Demostración. Partimos de la definición 40:

$$\mathbf{v} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt_0}, c \frac{dt}{dt_0} \right)$$

Mediante la proposición 48 en la página 196, podemos relacionar dt con dt_0 :

$$dt = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dt_0$$

Así, por la regla de la cadena, tenemos:

$$\mathbf{v} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{dt_0}, c \frac{dt}{dt} \frac{dt}{dt_0} \right) = \frac{dt}{dt_0} \left(\frac{d\vec{r}}{dt}, c \right) = \frac{dt}{dt_0} (\vec{v}, c) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (\vec{v}, c)$$

Q.E.D.

Notación 6. En lo sucesivo, con frecuencia se usará:

$$\gamma(v) := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

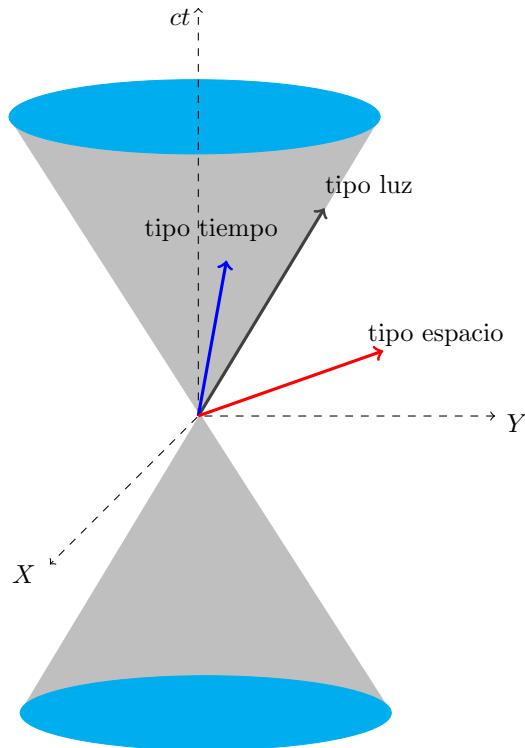
5.6.3. Cono de luz

Definición 41 (vectores tipo espacio, tiempo y luz).

- Diremos que un vector v de \mathbb{R}^4 es **tipo espacio** si su pseudonorma según el producto escalar de Minkowski (ver definición 34 en la página 211) es positiva.

- Diremos que un vector v de \mathbb{R}^4 es **tipo tiempo** si su pseudonorma según el producto escalar de Minkowski (ver definición 34 en la página 211) es negativa.
- Diremos que un vector v de \mathbb{R}^4 es **tipo luz** si su pseudonorma según el producto escalar de Minkowski (ver definición 34 en la página 211) es nula.

Para dar una interpretación física a cada tipo de vector, tenemos que recurrir al cono de luz. Con el fin de que podamos hacer la representación en tres dimensiones, eliminaremos una de las dimensiones espaciales, es decir, supondremos que tenemos dos coordenadas espaciales x e y y una temporal ct . La figura del cono de luz es la siguiente:



Con el fin de entender la figura, supongamos que somos un observador S que se encuentra en el vértice del cono. Los ejes representados son X, Y en el plano horizontal y ct en la dirección vertical; la ecuación del cono de la figura es $x^2 + y^2 = c^2t^2$.

Un vector tipo luz tiene pseudonorma nula y, por tanto, para todo vector tipo luz se da $x^2 + y^2 - c^2t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = c^2t^2$. Es decir, todo vector de luz se encuentra contenido en el cono. Por otra parte, la pseudonorma de un vector tipo tiempo satisface $x^2 + y^2 - c^2t^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < c^2t^2$ y, por ende, todo vector tipo tiempo se encuentra en el interior del cono. Por último, la pseudonorma de un vector tipo espacio satisface $x^2 + y^2 - c^2t^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > c^2t^2$ y, en consecuencia, todo vector tipo espacio está situado en el espacio exterior al cono.

El cono de luz representa, precisamente, todas las «trayectorias» de todos los rayos de luz que nos han llegado desde el pasado y todos los rayos de luz que emitimos hacia el futuro.

Además, los vectores tipo tiempo representan trayectorias en las que no se supera la velocidad de la luz. Para ver esto, consideremos una partícula cuya cuadrvelocidad sea $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt_0} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt_0}, c \frac{dt}{dt_0} \right) = \frac{1}{dt_0} (d\vec{r}, cdt)$ y estudiemos:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \left(\frac{1}{dt_0} \right)^2 \left[(dx)^2 + (dy)^2 - c^2 (dt)^2 \right] < 0$$

ya que $d\mathbf{r} = (dx, dy, cdt)$ es un vector tipo tiempo. Por un razonamiento análogo, los vectores tipo espacio representan trayectorias en las que la velocidad nunca es inferior a la de la luz.

Como la información no puede viajar a mayor velocidad que la de la luz, el interior del cono contiene todos los sucesos que han podido afectar a nuestro pasado y todos los sucesos a los que podemos afectar en nuestro futuro; es decir, nuestro pasado se encuentra debajo del plano XY (y en el interior del cono) y todos nuestros posibles futuros se encuentran encima del plano XY (y en el interior del cono). Por tanto, hay una amplia zona del espacio-tiempo (el exterior del cono) de la que estamos causalmente desconectados (pues ningún rayo de luz puede viajar entre esas zonas y nosotros o al revés).

Un aspecto muy importante de esta figura es que, como el pseudoproducto escalar de Minkowski es invariante Lorentz, los vectores tipo tiempo, son de tipo tiempo para cualquier observador, los vectores tipo luz, lo son para cualquier observador y los vectores tipo espacio lo son, también, para cualquier observador. Esto significa que todos los observadores coinciden en qué conjunto de sucesos son el futuro y el pasado de todos los observadores, aunque las coordenadas de cada suceso sí que dependan del observador. Es por esto que la parte del interior del cono de luz que se corresponde con el futuro de un observador recibe el nombre de futuro absoluto, mientras que la parte del interior del cono que se corresponde con el pasado de un observador recibe el nombre de pasado absoluto.

5.7. Momento lineal relativista y energía

5.7.1. Por qué la definición clásica de momento lineal falla

Recordemos que la definición clásica de momento lineal era:

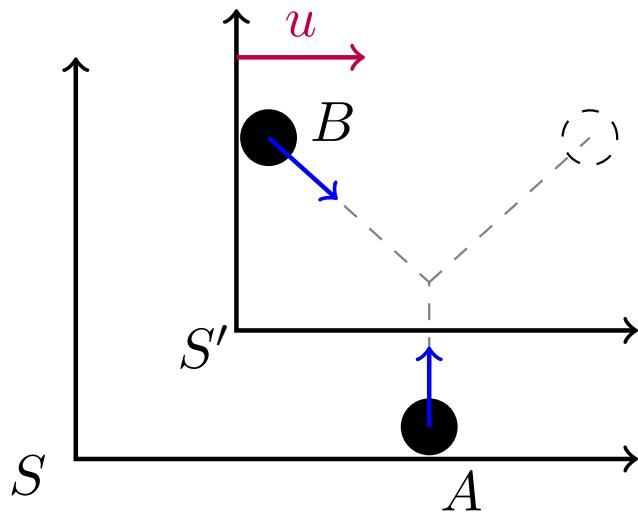
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Entonces, parece lógico considerar el vector de \mathbb{R}^4 $m(\vec{v}, c)$, pero como (\vec{v}, c) no es un cuadrivector, entonces $m(\vec{v}, c)$ tampoco podrá serlo.

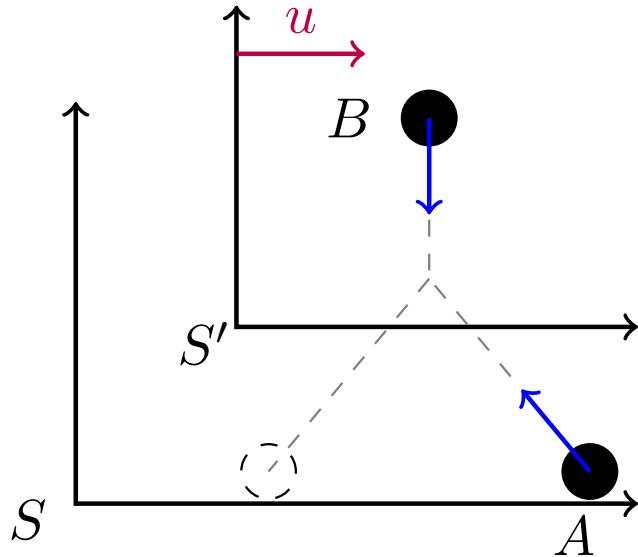
Además, veamos un ejemplo para convencernos de que la definición clásica de momento lineal nos plantea varios problemas (además de que no cambie de sistema de referencia mediante transformaciones de Lorentz).

Ejemplo 28. Consideremos la colisión entre dos partículas. En física clásica, el momento lineal debería conservarse. Veamos que con la definición clásica, el momento lineal no se conserva. Imaginemos la siguiente situación:

El observador A se encuentra en reposo con respecto a S y A lanza un proyectil en vertical. El observador B va montado en un tren (el tren constituye el observador S'), es decir, el observador B está en reposo con respecto a S' , y quiere lanzar una pelota para que colisione con el proyectil lanzado por el observador A . Visto desde S , tenemos:



Y visto desde S' :



En resumen:

- El observador A está en reposo con respecto a S , lanza un proyectil de masa m en vertical con velocidad v_0 y ve a B avanzando a la derecha con velocidad u .
- El observador B está en reposo con respecto a S' , lanza un proyectil de masa m en vertical hacia abajo con velocidad v_0 y ve A avanzando hacia la izquierda con velocidad u .

Supondremos que el choque entre ambos cuerpos es completamente elástico. A continuación, vamos a estudiar si se conserva el momento lineal con respecto a cada uno de los sistemas de referencia:

- La partícula A vista desde S :

Las velocidades iniciales son:

$$\left. \begin{array}{l} v_{A,x} = 0 \\ v_{A,y} = v_0 \end{array} \right\} \Rightarrow P_{A,y}^{\text{inicial}} = mv_0$$

Como el choque es completamente elástico, la velocidad final es:

$$\left. \begin{array}{l} v_{A,x} = 0 \\ v_{A,y} = -v_0 \end{array} \right\} \Rightarrow P_{A,y}^{\text{final}} = -mv_0$$

De esta forma, tenemos:

$$\Delta P_{A,y} = -mv_0 - mv_0 = -2mv_0$$

- La partícula B vista desde S' :

Las velocidades iniciales son:

$$\left. \begin{array}{l} v'_{B,x} = 0 \\ v'_{B,y} = -v_0 \end{array} \right\}$$

Como el choque es completamente elástico, las velocidades finales son:

$$\left. \begin{array}{l} v'_{B,x} = 0 \\ v'_{B,y} = v_0 \end{array} \right\}$$

- La partícula B vista desde S :

Usando la transformación de Lorentz para velocidades (ver proposición 52 en la página 207), obtenemos que las velocidades iniciales son:

$$v_{B,x} = \frac{v'_{B,x} + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_{B,x}} = \frac{0 + u}{1 + \frac{u}{c^2} 0} = u$$

$$v_{B,y} = \frac{v'_{B,y}}{\gamma \left(1 + \frac{u}{c^2} v'_{B,x} \right)} = \frac{-v_0}{\gamma \left(1 + \frac{u}{c^2} 0 \right)} = -\frac{v_0}{\gamma}$$

donde es $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$.

Las velocidades finales quedan:

$$v_{B,x} = \frac{v'_{B,x} + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_{B,x}} = \frac{0 + u}{1 + \frac{u}{c^2} 0} = u$$

$$v_{B,y} = \frac{v'_{B,y}}{\gamma \left(1 + \frac{u}{c^2} v'_{B,x} \right)} = \frac{v_0}{\gamma \left(1 + \frac{u}{c^2} 0 \right)} = \frac{v_0}{\gamma} = v_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

De esta forma, la variación en momento lineal queda:

$$\Delta P_{B,y} = m \frac{v_0}{\gamma} + m \frac{v_0}{\gamma} = 2m \frac{v_0}{\gamma} = 2mv_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

Por consiguiente es:

$$\Delta P_{A,y} \neq \Delta P_{B,y}$$

En otras palabras, el momento lineal clásico no se conserva.

Esto nos lleva a buscar una definición de momento lineal relativista que sí se conserve en las colisiones y que, si es posible, cambie de sistema de referencia a través de las transformaciones de Lorentz. Dicha definición existe y es la que presentamos a continuación:

Definición 42. Llamamos **cuadrimomento** o **cuadrivector energía-momento** de una partícula de masa m al cuadrivector:

$$\mathbf{p} := m\mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt_0} = \left(m \frac{d\vec{r}}{dt_0}, m \frac{dt}{dt_0} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (m\vec{v}, mc) = (\gamma(v) m\vec{v}, \gamma(v) mc)$$

donde \mathbf{v} es la cuatrivelocidad introducida en la definición 40 en la página 215 y t_0 es el tiempo propio (ver definición 32 en la página 195).

Fijémonos en que \mathbf{p} es, efectivamente, un cuadrivector ya que \mathbf{v} lo es y m es una constante que no depende del observador.

El cuadrimomento también recibe el nombre de cuadrivector energía-momento. La idea es que, la cuarta componente del cuadrimomento multiplicada por c tiene unidades de energía: $[\gamma(v) mc^2] = \text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m} = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$. Como c es una constante que no depende del observador (véase el postulado 5 en la página 195), la cuarta componente del momento será siempre proporcional a la energía. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 43. Sea una partícula de masa m . Definimos su **energía** como la cuarta componente de su cuadrimomento multiplicada por c . Es decir:

$$E = \gamma(v) mc^2 = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2$$

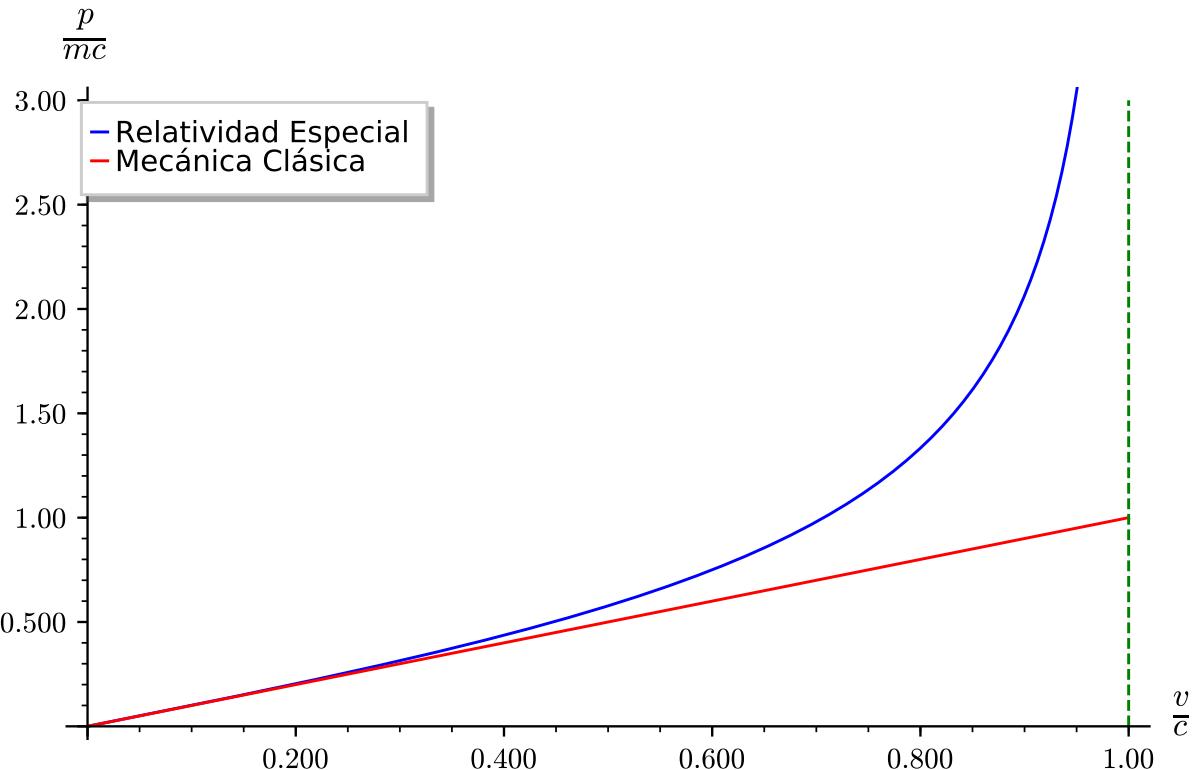
donde v es la velocidad de la partícula.

Definición 44. Llamaremos **momento lineal relativista** o **trimomento** a las tres primeras componentes del cuadrimomento (ver definición 42 en la página anterior):

$$\vec{p} := m \frac{d\vec{r}}{dt_0} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{dt_0} = m\gamma(v) \vec{v} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v}$$

Observación 45. Nótese que el $d\vec{r}$ depende del observador, mientras que el tiempo propio es el medido por el que está montado en la partícula. Como siempre, si $v \ll c$, entonces $\vec{p} \approx m\vec{v}$.

Observación 46. Nótese que según la expresión dada en la proposición 44, no es posible alcanzar nunca la velocidad de la luz, ya que la expresión del trimomento diverge para $v = c$. Esto puede verse gráficamente con la siguiente figura:



De esta forma, la conservación del cuadrimomento va a suponer la conservación del trimomento y la energía todo en la misma ecuación. Es decir, en física relativista, la conservación del momento y la conservación de la energía ya no van por separado como lo hacían en física clásica. En relatividad, no puede conservarse uno si no se conserva el otro, porque la verdadera magnitud conservada es el cuadrimomento.

Veamos que esta nueva definición de momento lineal relativista se conserva en el ejemplo 28 en la página 217:

Ejemplo 29.

- Partícula A vista desde S :

Velocidades iniciales:

$$\left. \begin{array}{l} v_{A,x} = 0 \\ v_{A,y} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P_{A,y}^{\text{inicial}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} v_0$$

Como el choque es completamente elástico, las velocidades finales quedan:

$$\left. \begin{array}{l} v_{A,x} = 0 \\ v_{A,y} = -v_0 \end{array} \right\} \Rightarrow P_{A,y}^{\text{final}} = -\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} v_0$$

De esta forma, la variación total de momento lineal es:

$$\Delta P_{A,y} = -\frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} v_0$$

- Partícula B vista desde S :

Velocidades iniciales:

$$\left. \begin{array}{l} v_{B,x} = u \\ v_{B,y} = -v_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \end{array} \right\}$$

donde este último dato lo hemos obtenido a partir de la transformación de Lorentz de velocidades (ver proposición 52 en la página 207), algo que ya hicimos en el ejemplo 28 en la página 217.

$$v_B^{\text{inicial}} = \sqrt{\left(v_{B,x}^{\text{inicial}}\right)^2 + \left(v_{B,y}^{\text{inicial}}\right)^2} = \sqrt{u^2 + v_0^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}$$

$$P_{B,y}^{\text{inicial}} = \frac{-m}{\sqrt{1 - \frac{u^2 + v_0^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{c^2}}} v_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

Como el choque es perfectamente elástico, llegamos a las siguientes velocidades finales:

$$\left. \begin{array}{l} v_{B,x} = u \\ v_{B,y} = v_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \end{array} \right\}$$

$$v_B^{\text{final}} = \sqrt{\left(v_{B,x}^{\text{final}}\right)^2 + \left(v_{B,y}^{\text{final}}\right)^2} = \sqrt{u^2 + v_0^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}$$

$$P_{B,y}^{\text{final}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2 + v_0^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{c^2}}} v_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (5.7.1)$$

Operando, obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right) &= 1 - \frac{v_0^2}{c^2} - \frac{u^2}{c^2} + \frac{u^2 v_0^2}{c^4} = \\ &= 1 - \frac{u^2 + v_0^2 - \frac{u^2 v_0^2}{c^2}}{c^2} = 1 - \frac{u^2 + v_0^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{c^2} \end{aligned}$$

De esta forma, podemos reescribir la ecuación 5.7.1 como:

$$\begin{aligned} P_{B,y}^{\text{inicial}} &= \frac{-m}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)}} v_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \\ &= \frac{-m}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} v_0 \end{aligned}$$

$$P_{B,y}^{\text{final}} = \frac{m}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)}} v_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} v_0$$

Así, llegamos a:

$$\Delta P_{B,y} = \frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} v_0 = -\Delta P_{A,y}$$

Por ende, el momento lineal relativista se conserva.

Proposición 55 (boost del cuadrimomento). *Un observador S mide un trimomento $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ y una energía E . Por otra parte, un observador S' , que se desplaza a velocidad constante u a lo largo del eje X positivo con respecto a S , mide un trimomento $\vec{p}' = (p'_x, p'_y, p'_z)$ y una energía E' . Los valores medidos por S y los medidos por S' están relacionados por las expresiones:*

$$\left\{ \begin{array}{l} p'_x = \frac{p_x - u \frac{E}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \\ E' = \frac{E - up_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

Igualmente, se cumple:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_x = \frac{p'_x + u \frac{E'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ p_y = p'_y \\ p_z = p'_z \\ E = \frac{E' + up'_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

Demostración. Vamos a probar el resultado basándonos en el hecho de que el cuadrimomento es un cuatrivector. Como el cuadrimomento es un cuadrivector, la aplicación que nos da el cambio de coordenadas entre S y S' es una transformación de Lorentz, en concreto la transformación de Lorentz a usar será la misma que la dada en la proposición 50 en la página 202, dado que estamos ante un boost, al igual que en dicha proposición. Por tanto, recordemos las ecuaciones dadas en dicha proposición:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (x - ut) = \frac{x - \frac{u}{c} ct}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \left(t - \frac{ux}{c^2} \right) \Leftrightarrow ct' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \left(ct - \frac{u}{c} x \right) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el cuatrimomento es $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c})$, en nuestro caso p_x jugará el papel de x , p_y jugará el papel de y , p_z jugará el papel de z y $\frac{E}{c}$ jugará el papel de ct . Así, obtenemos:

$$p'_x = \frac{p_x - \frac{u}{c} \frac{E}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{p_x - u \frac{E}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$p'_y = p_y$$

$$p'_z = p_z$$

$$\frac{E'}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \left(\frac{E}{c} - \frac{up_x}{c} \right) \Leftrightarrow E' = \frac{E - up_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Por último, para obtener la transformación inversa no tenemos más que recordar que, por el teorema 10 en la página 212, las transformaciones de Lorentz forman un grupo y, por tanto, la inversa de una transformación de Lorentz es otra transformación de Lorentz, en concreto, la que cambia las coordenadas entre S' y S . Por tanto, únicamente es menester cambiar primas por no primas y u por $-u$ en las expresiones de la transformación directa. Q.E.D.

Antes de pasar al apartado correspondiente a energías, vamos a hacer una breve mención al papel de la fuerza en relatividad especial. El concepto de fuerza no resulta aquí tan útil como lo hace en física clásica. Además, existen varias definiciones, todas con sus ventajas e inconvenientes. Aquí vamos a presentar la que nos va a permitir derivar la definición de energía cinética relativista.

Definición 45. Llamamos **trifuerza** \vec{F} que actúa sobre una partícula de masa m a:

$$\vec{F} := \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\gamma(v)m\vec{v})}{dt}$$

donde \vec{p} es el trimomento (ver definición 44 en la página 220) y t es el tiempo medido por el observador que mide \vec{p} .

Una de las ventajas que tiene la definición anterior, además de permitir el desarrollo del concepto de energía relativista, es que preserva, en cierta medida, la Segunda Ley de Newton, aunque el momento que aparezca sea el momento relativista. Además, para velocidades $v \ll c$, la definición anterior tiende a la clásica. Por último, esta definición nos va a permitir heredar el teorema de conservación del momento lineal de la física clásica.

También existe un cuadrvector asociado a la fuerza, que recibe el nombre de cuadrifuerza (y que, por ser un cuadrvector, presenta todas las ventajas en lo que se refiere a cambios entre sistemas de referencia, es decir, sigue la transformación de Lorentz), pero que no vamos a definir aquí porque no nos va a ser de utilidad este curso.

5.8. Energía cinética relativista

Una de las ventajas de la definición de fuerza escogida en la definición 45 es que nos va a permitir definir la energía cinética del mismo modo del que lo hacíamos en física clásica (a través del teorema de la energía cinética).

Definición 46. Sea una partícula de masa m que recorre una trayectoria μ , siendo μ un camino. Llamaremos **ganancia en energía cinética** al trabajo realizado por la trifuerza a lo largo del camino μ . Podemos expresar dicho trabajo como la integral de la 1-forma asociada a la fuerza a lo largo del camino μ .

$$\Delta T := W_\mu = \int_\mu \vec{F}$$

Definición 47. Llamaremos **energía cinética** de una partícula de masa m y velocidad v al trabajo necesario para acelerar dicha partícula desde el reposo hasta su velocidad actual.

Proposición 56. *La energía cinética relativista de una partícula de masa m y velocidad v viene dada por la expresión:*

$$T = (\gamma(v) - 1) mc^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) mc^2$$

Demostración. Partimos de la definición 47. Por tanto, debemos calcular el trabajo que debe actuar sobre la partícula para acelerarla desde el reposo hasta su velocidad actual v .

Para ello, supondremos que la partícula recorre una trayectoria μ desconocida para nosotros pero que es tal que la velocidad al comienzo de dicha trayectoria era nula. De esta forma, aplicaremos la definición 46 en la página anterior:

$$T = W_\mu = \int_\mu \vec{F}$$

Parametrizamos el camino anterior mediante la función $\vec{\mu}(t)$ con la que parametrizamos la posición de la partícula en función del tiempo. Llamamos t_0 al instante correspondiente al origen del camino y t_f al instante correspondiente al extremo del camino. Así:

$$T = \int_{t_0}^{t_f} \vec{F}(\vec{\mu}(t)) \cdot \frac{d\vec{\mu}}{dt}(t) dt$$

donde $\frac{d\vec{\mu}}{dt}$ es justo el vector velocidad de la partícula a lo largo del camino. De esta forma, llamando $\vec{v}(t) := \frac{d\vec{\mu}}{dt}(t)$, podemos reescribir lo anterior como:

$$T = \int_{t_0}^{t_f} \vec{F}(\vec{\mu}(t)) \cdot \vec{v}(t) dt$$

Por la definición de trifuerza (ver definición 45 en la página anterior), tenemos:

$$\vec{F}(\vec{\mu}(t)) = \frac{d\left(\gamma m \frac{d\vec{\mu}}{dt}\right)}{dt}(t) = \frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt}(t)$$

donde hemos aplicado $\frac{d\vec{\mu}}{dt}(t) = \vec{v}(t)$. Por consiguiente, la energía cinética queda:

$$T = \int_{t_0}^{t_f} \frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt}(t) \cdot \vec{v}(t) dt$$

Ahora, vamos a hacer partes en la expresión anterior. Tomaremos:

$$db = \frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt}(t) dt = d(\gamma m \vec{v})(t)$$

$$a = \vec{v}(t)$$

De esta forma, es:

$$b = (\gamma m \vec{v})(t)$$

$$da = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) dt$$

En consecuencia, por el teorema de integración por partes:

$$T = [(\gamma m \vec{v} \cdot \vec{v})(t)]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} (\gamma m \vec{v})(t) \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}(t) dt =$$

$$= [\gamma(\nu) m\nu^2]_{\nu=|\vec{v}(t_0)|=0}^{\nu=|\vec{v}(t_f)|=v} - \int_{\vec{v}(t_0)}^{\vec{v}(t_f)} \gamma(|\vec{v}|) m\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

donde es $|\vec{v}(t_0)| = 0$, porque la partícula parte del reposo. Por ende:

$$\begin{aligned} T &= \gamma(v) mv^2 - \int_{\nu=|\vec{v}(t_0)|=0}^{\nu=|\vec{v}(t_f)|=v} \gamma(\nu) m\nu d\nu = \\ &= \gamma(v) mv^2 - m \int_0^v \frac{\nu}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}} d\nu = \gamma(v) mv^2 + mc^2 \int_0^v \frac{-\frac{2}{c^2}\nu}{2\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}} d\nu = \\ &= \gamma(v) mv^2 + mc^2 \left[\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}} \right]_{\nu=0}^{\nu=v} = \gamma(v) mv^2 + mc^2 \left(\frac{1}{\gamma(v)} - 1 \right) = \\ &= \gamma(v) mv^2 + \frac{mc^2}{\gamma(v)} - mc^2 = m \frac{\gamma(v)^2 v^2 + c^2}{\gamma(v)} - mc^2 = m \frac{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} v^2 + c^2}{\gamma(v)} - mc^2 = \\ &= m \frac{\frac{v^2 + (1 - \frac{v^2}{c^2}) c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - mc^2}{\gamma(v)} = m \frac{\frac{v^2 + c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - mc^2}{\gamma(v)} = m \frac{c^2 \gamma(v)^2}{\gamma(v)} - mc^2 = mc^2 \gamma(v) - mc^2 = \\ &= (\gamma(v) - 1) mc^2 \end{aligned}$$

Q.E.D.

Observación 47. A primera vista, la energía cinética relativista parece bastante diferente de la clásica:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

No obstante, si es $v \ll c$, haciendo un desarrollo de Taylor de primer orden centrando en 0 cuando $v^2 \rightarrow 0$, obtenemos el resultado clásico. Veámoslo. Por la proposición 56 en la página anterior, es:

$$T(v) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) mc^2$$

$$T(v=0) = 0$$

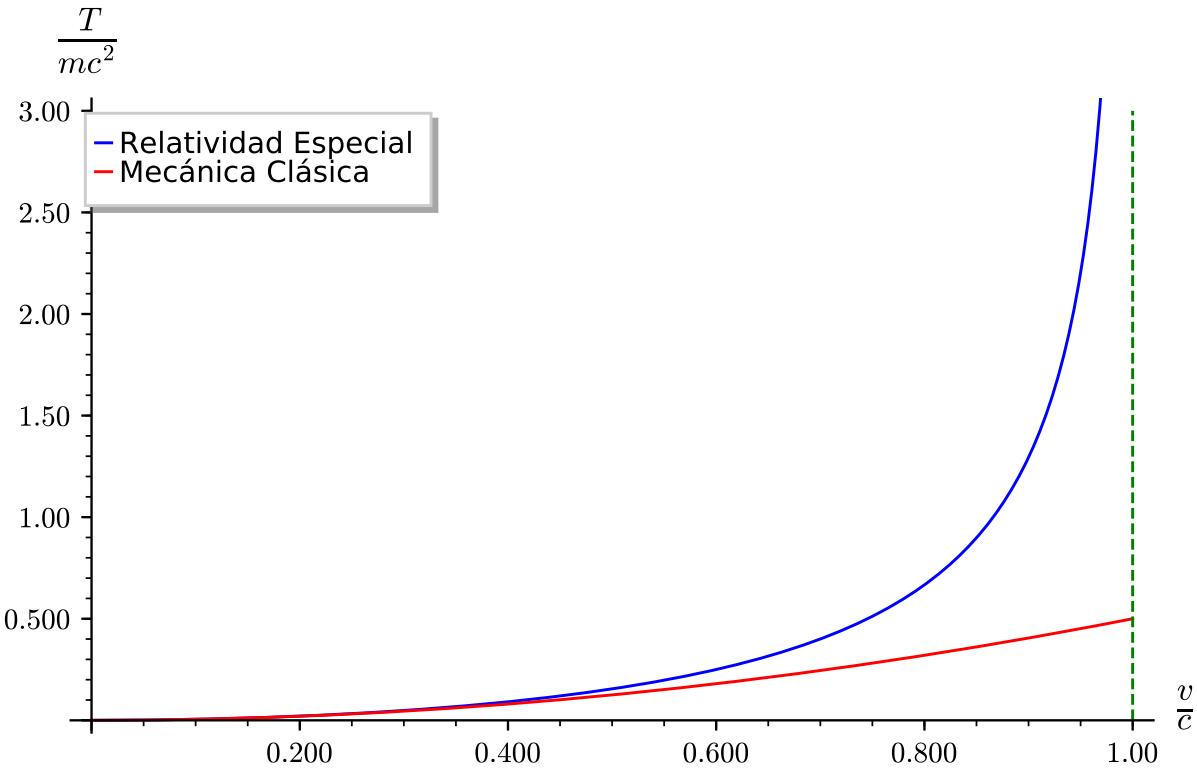
$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial(v^2)} &= mc^2 \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{1}{c^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \\ \left[\frac{\partial T}{\partial(v^2)} \right]_{v=0} &= \frac{1}{2} m \end{aligned}$$

Así, obtenemos:

$$T(v) = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{cuando } v \rightarrow 0$$

De esta forma, recuperamos el resultado clásico.

Observación 48. Nótese que según la expresión dada en la proposición 56 en la página anterior, no es posible alcanzar nunca la velocidad de la luz, ya que la expresión de la energía cinética diverge para $v = c$. Esto puede verse gráficamente con la siguiente figura:



Nótese que teniendo en cuenta la definición de energía dada en la definición 43 en la página 219 y la expresión obtenida en la proposición 56 en la página 224 se da:

$$E = T + mc^2$$

Esto motiva la siguiente definición:

Definición 48. Llamamos **energía en reposo** E_0 de una partícula de masa m a:

$$E_0 := mc^2$$

Observación 49. La definición 48 es posiblemente, una de las ecuaciones más famosas de la relatividad y establece una equivalencia entre masa y energía.

Proposición 57. La energía total de una partícula de masa m y velocidad v satisface la ecuación:

$$E = T + E_0$$

donde T es la energía cinética de la partícula y E_0 es su masa en reposo.

Demostración. Partimos de la expresión de la energía cinética (ver proposición 56 en la página 224) y de la definición de energía en reposo (ver definición 48):

$$T + E_0 = (\gamma(v) - 1) mc^2 + mc^2 = (\gamma(v) - 1 + 1) mc^2 = \gamma(v) mc^2 = E$$

donde el último paso se debe a la definición 43 en la página 219.

Q.E.D.

Proposición 58. Sea p el módulo del trimomento de una partícula, sea E_0 su masa en reposo y E su energía. Se satisface la relación:

$$E^2 = p^2 c^2 + E_0^2$$

Demostración. Partimos de la definición de trimomento (ver definición 44 en la página 220):

$$\vec{p} = \gamma(v) m \vec{v} \Rightarrow p = \gamma(v) m v \Leftrightarrow p^2 = \gamma(v)^2 m^2 v^2 \Leftrightarrow p^2 c^2 = \gamma(v)^2 m^2 v^2 c^2$$

Por otra parte, por la definición 48 en la página anterior, tenemos:

$$E_0 = mc^2 \Leftrightarrow E_0^2 = m^2 c^4$$

Sumando ambas ecuaciones, llegamos a:

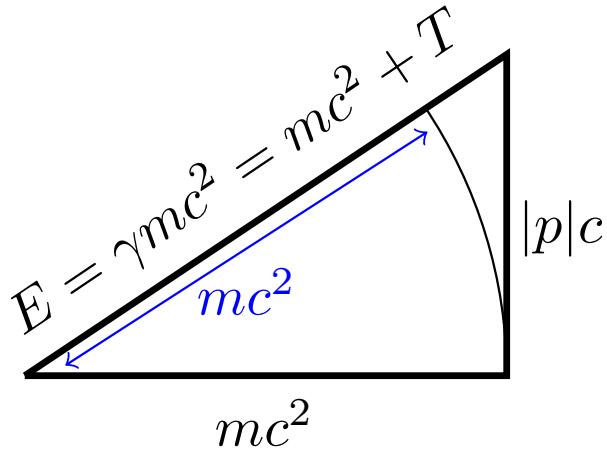
$$\begin{aligned} p^2 c^2 + E_0^2 &= \gamma(v)^2 m^2 v^2 c^2 + m^2 c^2 c^2 = m^2 c^2 \left(\gamma(v)^2 v^2 + c^2 \right) = \\ &= m^2 c^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} v^2 + c^2 \right) = m^2 c^2 \frac{v^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \\ &= m^2 c^2 \frac{v^2 + c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2 c^2 \frac{c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2 c^4 \gamma(v)^2 = (\gamma(v) m c^2)^2 = E^2 \end{aligned}$$

donde el último paso se debe a la definición 43 en la página 219. Q.E.D.

Observación 50. El enunciado de la proposición 58 en la página anterior normalmente se interpreta geométricamente a través del llamado triángulo relativista, ya que si nos fijamos en la expresión:

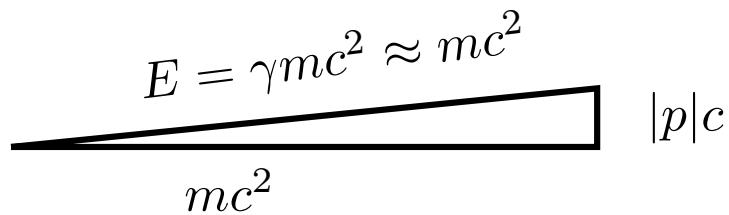
$$E^2 = p^2 c^2 + E_0^2$$

vemos que es justo la expresión que daría el teorema de Pitágoras para un triángulo de catetos pc y E_0 y con hipotenusa E . Gráficamente:



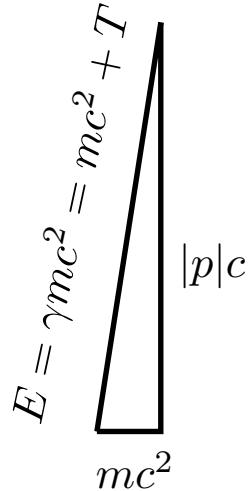
En particular, para velocidades mucho menores que la de la luz $v \ll c \Rightarrow \gamma \approx 1 \wedge E \approx mc^2$, el triángulo queda:

$$v \ll c \implies \gamma \approx 1 \implies E \approx mc^2$$



Por el contrario, para el caso $v \approx c \Rightarrow \gamma \gg 1$, tenemos:

$$v \rightarrow c \implies \gamma \gg 1$$



Otra ecuación interesante que relaciona la energía con el trimomento y la velocidad es la siguiente:

Proposición 59. *Sea una partícula de velocidad \vec{v} , trimomento \vec{p} y energía E . Se cumple la relación:*

$$\frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{p}c}{E}$$

Demostración. Partimos de lado derecho de la ecuación y llegaremos al izquierdo. Por la definición de trimomento (ver definición 44 en la página 220), tenemos:

$$\frac{\vec{p}c}{E} = \frac{\gamma(v) m \vec{v} c}{E} = \frac{\gamma(v) m c^2}{E} \frac{\vec{v}}{c}$$

Por la definición de energía (ver definición 43 en la página 219), tenemos:

$$\frac{\vec{p}c}{E} = \underbrace{\frac{\gamma(v) m c^2}{E} \vec{v}}_{=E} = \frac{E \vec{v}}{E c} = \frac{\vec{v}}{c}$$

con lo que llegamos al enunciado. Q.E.D.

5.8.1. Partículas sin masa

Nótese que en las expresiones dadas en las proposiciones 58 en la página 226 y 59 no aparece la masa de forma explícita. Esto hace que sea natural preguntarse si existe alguna otra definición de trimomento que permita que se sigan cumpliendo las expresiones dadas en las proposiciones 58 en la página 226 y 59 para partículas sin masa. Resulta que dicha definición existe.

Proposición 60. *Existe una definición de trimomento \vec{p} para partículas sin masa tal que, respetando la definición 48 en la página 226, se siguen cumpliendo las expresiones dadas en las proposiciones 58 en la página 226 y 59. Dicha definición es:*

$$\vec{p} = \frac{E}{c} \hat{v}$$

siendo \hat{v} el vector unitario de la velocidad de la partícula sin masa. Además, toda partícula sin masa, compatible con las proposiciones y definición mencionadas, debe cumplir que el módulo de su velocidad sea siempre igual a la velocidad de la luz $v = c$. Por último, el módulo del trimomento y la energía satisfacen la relación:

$$E = pc$$

Demostración. Como debemos respetar la definición 48 en la página 226 y las partículas que consideramos no tienen masa $m = 0$, debe ser:

$$E_0 = mc^2 = 0$$

Sustituyendo el valor de la energía en reposo en la expresión dada en la proposición 58 en la página 226, obtenemos:

$$E^2 = p^2 c^2 \Leftrightarrow E = pc \Leftrightarrow p = \frac{E}{c} \quad (5.8.1)$$

luego el módulo del trimomento debe ser la energía partida por la velocidad de la luz.

A continuación, considerando la proposición 59 en la página anterior en su forma vectorial, obtenemos que \vec{v} debe ir en la dirección de \vec{p} . De esto y de la ecuación 5.8.1, deducimos que la definición de trimomento buscada es:

$$\vec{p} = \frac{E}{c} \hat{v}$$

Además, considerando la expresión dada en la proposición 59 en la página anterior en módulo, obtenemos:

$$\frac{v}{c} = \frac{pc}{E}$$

Por la ecuación 5.8.1, es $E = pc$ y, por ende:

$$\frac{v}{c} = \frac{E}{E} = 1 \Leftrightarrow v = c$$

Por lo tanto, el módulo de la velocidad de una partícula sin masa ha de ser siempre la velocidad de la luz. Q.E.D.

5.9. Problemas

Ejercicio 18 (Problema 5.1). Para un observador O , una varilla en reposo tiene longitud L y forma un ángulo α con el eje X . ¿Cuál es la longitud y la orientación relativa para el observador O' , que viaja respecto a O con velocidad v según el eje X ?

Datos: $v = 0,8c$, $L = 1[\text{m}]$, $\alpha = 45^\circ$.

Solución. El sistema descrito en el enunciado puede visualizarse con mayor facilidad a partir de la imagen siguiente:

Puesto que la varilla se encuentra en reposo en relación al observador O , este medirá la longitud propa de la varilla; para este observador, la varilla mide una longitud L y se encuentra rotada un ángulo α , así pues:

$$L_x = L \cos \alpha$$

Debido a efectos relativistas, la componente horizontal de la varilla medida por el observador O' es la que sigue:

$$L'_x = \frac{L_x}{\gamma} = L \cos \alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

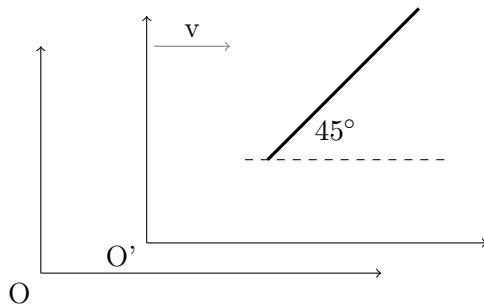


Figura 5.1: Sistema problema

Puesto que el observador O' se desplaza de forma completamente horizontal con respecto a O , tendremos que las componentes horizontales de la varilla no se verán transformadas, es decir $L_y = L'_y$. Podremos ahora deducir el ángulo α' según la cual la varilla está orientada según el observador O' , siendo esta:

$$\alpha' = \arctan\left(\frac{L'_x}{L'_y}\right) = \arctan\left(\frac{L'_x}{L_y}\right)$$

$$\alpha' = \arctan\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$$

A partir de este dato, podremos deducir la longitud de la varilla medida por el observador O' , esta será:

$$L' = \frac{L'_x}{\cos\alpha'}$$

Empleando los valores que nos ofrece el enunciado tendremos los siguientes resultados:

$$\alpha' = \arctan\left[\frac{\cos(45)}{\sin(45)}\sqrt{1 - \frac{(0,8c)^2}{c^2}}\right] \approx 30,95^\circ$$

$$L' \approx \frac{1 \cdot \cos(45)}{\cos(30,95)} = 0,82[\text{m}]$$

Q.E.F.

Ejercicio 19 (Problema 5.2). El radio de nuestra galaxia es, aproximadamente, de 30000 años-luz. ¿Con qué velocidad debería viajar un cohete para trasladarse desde el centro hasta el extremo de la galaxia en 30 años (medido por un observador en el cohete)? ¿Cuánto dura el viaje para un observador fijo en el centro de la galaxia? ¿Y para otro en reposo en el punto de destino?

Solución. $R = 30000$ años luz y $t' = 30$ años.

Debemos notar que el observador S' que está montado en el cohete mide el tiempo propio, ya que, para él, el cohete no se mueve a lo largo de t' .

Por otra parte, el observador S que está situado en el centro de la galaxia mide la longitud propia de la galaxia.

En ecuaciones, tenemos:

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}t'$$

$$R' = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}R$$

$$u = \frac{R'}{t'} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2} \frac{R}{t'}} \Leftrightarrow u^2 = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{R^2}{t'^2} \Leftrightarrow$$

$$u^2 \left(1 + \frac{R^2}{c^2 t'^2}\right) = \frac{R^2}{t'^2} \Leftrightarrow u = \pm \sqrt{\frac{\frac{R^2}{t'^2}}{1 + \frac{R^2}{c^2 t'^2}}}$$

Descartamos la solución negativa, pues consideramos que el cohete se desplaza hacia delante. Así, obtenemos:

$$u = \sqrt{\frac{\frac{R^2}{t'^2}}{1 + \frac{R^2}{c^2 t'^2}}}$$

Sustituyendo por los valores numéricos, llegamos a:

$$u = \sqrt{\frac{\left(\frac{30000}{30}\right)^2}{1 + \left(\frac{30000}{1 \cdot 30}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1000^2}{1 + 1000^2}}$$

En vez de introducir el valor anterior en la calculadora, podemos hacer Taylor de primer orden de \sqrt{x} :

$$\begin{aligned} (\sqrt{x})(x=1) &= 1 \\ (\sqrt{x})'(x=1) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x=1) = \frac{1}{2} \\ \sqrt{x} &\approx 1 + \frac{1}{2}(x-1) \quad \text{cuando } x \rightarrow 1 \end{aligned}$$

De esta forma, tenemos:

$$\begin{aligned} u &\approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1000^2}{1 + 1000^2} - 1 \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \frac{1000^2 - 1 - 1000^2}{1 + 1000^2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + 1000^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{1000^2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{10^6} = \\ &= 1 - \frac{10}{2} \frac{1}{10^7} = 1 - 5 \frac{1}{10^7} = 1 - 5 \cdot 10^{-7} = 0,9999995 \frac{\text{años luz}}{\text{año}} \end{aligned}$$

Notemos que tanto el observador que está en el centro de la galaxia como el que está en el extremo se ven en reposo el uno al otro (suponemos que la galaxia no gira). Por tanto, la respuesta para ambos observadores va a ser la misma: es cuestión de aplicar la siguiente fórmula:

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} t'$$

Sustituyendo por los valores numéricos, llegamos a:

$$\begin{aligned} t &\approx \frac{30}{\sqrt{1 - \left(1 - 5 \frac{1}{10^7}\right)^2}} = \frac{30}{\sqrt{1 - \left(1 - 10 \frac{1}{10^7} + \frac{5^2}{10^{14}}\right)}} = \frac{30}{\sqrt{\frac{1}{10^6} - \frac{5^2}{10^{14}}}} = \frac{30}{\sqrt{\frac{10^8 - 5^2}{10^{14}}}} = \\ &= 30 \sqrt{\frac{10^{14}}{10^8 - 5^2}} = 30 \cdot 10^7 \sqrt{\frac{1}{10^8 - 5^2}} = 30 \cdot 10^7 \sqrt{\frac{1}{10^8} \frac{1}{1 - \frac{5^2}{10^8}}} = \\ &= 30 \cdot \frac{10^7}{10^4} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{5^2}{10^8}}} = 3 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{5^2}{10^8}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\sqrt{\frac{1}{1+x}} \right) (x=1) &= 1 \\
 \left(\sqrt{\frac{1}{1+x}} \right)' (x=1) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{1+x}}} \frac{-1}{(1+x)^2} \right) (x=1) = -\frac{1}{2} \\
 t &\approx 3 \cdot 10^4 \left(1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{5^2}{10^8} - 1 \right) \right) = 3 \cdot 10^4 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{5^2}{10^8} \right) = \\
 &= 3 \cdot 10^4 \left(1 + \frac{10}{2} \frac{5^2}{10^9} \right) = 3 \cdot 10^4 \left(1 + \frac{5^3}{10^9} \right) \approx 30000,00375 \text{ años}
 \end{aligned}$$

Q.E.F.

Ejercicio 20 (Problema 5.3). Un cohete, cuya longitud en reposo es de $60[m]$, se aleja de la Tierra. Desde ésta se envía una señal de luz que se refleja en dos espejos situados en los extremos del cohete. La primera reflexión llega a la Tierra $200[s]$ después de enviar la señal, y la segunda $1,47[\mu s]$ más tarde. Encuentra a qué distancia de la Tierra se encontraba el cohete en el momento de lanzar el destello. ¿Con qué velocidad viaja el cohete?

Solución. Sea $t_1 \equiv 200[s]$ y $t_2 \equiv 1,47 \cdot 10^{-6}[s]$ y L la longitud del cohete medida por un observador situado en la tierra. Puesto que la señal de luz debe ir hasta el cohete y volver, el tiempo que tarda la señal en alcanzar el extremo del cohete más cercano a la tierra es igual a $t_1/2$, por lo tanto:

$$D_{\{\oplus, cohete\}} = c \frac{t_1}{2} = 3 \cdot 10^8 \frac{200}{2} = 3 \cdot 10^{10}[m]$$

La señal tarda un tiempo $t_2/2$ en llegar a un extremo del cohete desde el otro, sin embargo, al estar el cohete en movimiento con una cierta velocidad v , el espacio recorrido por la señal en este tiempo será igual a la suma de la longitud del cohete (vista por un observador en la tierra) con el espacio recorrido por el cohete en este tiempo, es decir:

$$c \frac{t_2}{2} = L + v \frac{t_2}{2}$$

Así pues, la velocidad v del cohete será:

$$v = \frac{2}{t_2} \left(c \frac{t_2}{2} - L \right)$$

Sabemos por *Lorentz* que la relación entre la longitud del cohete medida desde la tierra L y la longitud del cohete en reposo $L_0 = 60[m]$ es la siguiente:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Sustituyendo este valor en la expresión para la velocidad del cohete:

$$v = \frac{2}{t_2} \left(c \frac{t_2}{2} - L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

Despejando v :

$$\begin{aligned}
 \frac{t_2}{2} (c - v) &= L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
 L_0^2 - \frac{L_0^2}{c^2} v^2 &= \left(\frac{t_2}{2} \right)^2 (c^2 + v^2 - 2cv)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{t_2}{2} \right)^2 + \frac{L_0^2}{c^2} \right] v^2 - 2c \left(\frac{t_2}{2} \right)^2 v + \left[\left(\frac{t_2}{2} \right)^2 c^2 - L_0^2 \right] = 0 \\
& \left[c^2 \left(\frac{t_2}{2} \right)^2 + L_0^2 \right] v^2 - 2c^3 \left(\frac{t_2}{2} \right)^2 v + \left[\left(\frac{t_2}{2} \right)^2 c^4 - c^2 L_0^2 \right] = 0 \\
v &= \frac{2c^3 \left(\frac{t_2}{2} \right)^2 \pm \sqrt{\left[4c^3 \left(\frac{t_2}{2} \right)^2 \right]^2 - 4 \left[c^2 \left(\frac{t_2}{2} \right)^2 + L_0^2 \right] \left[\left(\frac{t_2}{2} \right)^2 c^4 - c^2 L_0^2 \right]}}{2 \left[c^2 \left(\frac{t_2}{2} \right)^2 + L_0^2 \right]} = \\
&= \frac{2c^3 \left(\frac{t_2}{2} \right)^2 \pm \sqrt{4c^6 \left(\frac{t_2}{2} \right)^4 - 4 \left[\left(\frac{t_2}{2} \right)^4 c^6 - c^2 L_0^4 \right]}}{2 \left[c^2 \left(\frac{t_2}{2} \right)^2 + L_0^2 \right]} = \\
&= \frac{2c^3 \left(\frac{t_2}{2} \right)^2 \pm 2c L_0^2}{2 \left[c^2 \left(\frac{t_2}{2} \right)^2 + L_0^2 \right]} = c \left[\frac{c^2 \left(\frac{t_2}{2} \right)^2 \pm L_0^2}{c^2 \left(\frac{t_2}{2} \right)^2 + L_0^2} \right]
\end{aligned}$$

Así pues, tendremos dos posibles soluciones, siendo una de ellas, que el cohete se desplaza a la velocidad de la luz y la otra con velocidad:

$$v = c \left[\frac{c^2 \left(\frac{t_2}{2} \right)^2 - L_0^2}{c^2 \left(\frac{t_2}{2} \right)^2 + L_0^2} \right] = c \left[\frac{(3 \cdot 10^8)^2 \left(\frac{1,47 \cdot 10^{-6}}{2} \right)^2 - (60)^2}{(3 \cdot 10^8)^2 \left(\frac{1,47 \cdot 10^{-6}}{2} \right)^2 + (60)^2} \right]$$

$$v \approx 0,86c$$

Q.E.F.

Ejercicio 21 (Problema 5.5). Un astronauta, que viaja en un cohete de longitud en reposo L' a una velocidad v respecto a la Tierra, envía hacia la misma dos destellos luminosos simultáneos, uno desde cada extremo del cohete. Ambos destellos se envían cuando para el astronauta ha transcurrido un tiempo t'_0 desde su partida. ¿En qué instantes de tiempo recibe el observador terrestre, medidos con su propio reloj y a partir de la salida del cohete, estos dos destellos?

Solución. Comencemos definiendo la posición del cohete más cercana a la tierra como x_1 mientras que la posición del extremo más alejado será x_2 .

Sea $t_{\{O,1\}}$ el tiempo que ha transcurrido desde la partida del cohete medido por un observador en la tierra, por ello, tendremos que:

$$x_1 = vt_{\{O,1\}}$$

Por teoría, sabemos que la relación entre el tiempo de dos observadores es la que sigue:

$$t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right)$$

Suponiendo el origen de coordenadas del cohete en el extremo más cercano a la tierra, tendremos que $x' = 0$, por lo que:

$$x_1 = v\gamma \left(t'_0 + \frac{v \cdot 0}{c^2} \right) = v\gamma t'_0$$

Siendo que el observador terrestre registra una longitud L para el cohete, tendremos que:

$$x_2 = x_1 + L$$

Puesto que es el observador en el cohete el que mide la longitud propia del mismo, la longitud del cohete medida por el observador terrestre será la siguiente:

$$L = \frac{L'}{\gamma}$$

Con esto, tendremos la posición del extremo del cohete más alejado de la tierra:

$$x_2 = v\gamma t'_o + \frac{L'}{\gamma}$$

La luz tardará un tiempo $t_1 = \frac{x_1}{c}$ en realizar el trayecto desde el extremo más cercano del cohete a la tierra, mientras que tardará un tiempo $t_2 = \frac{x_2}{c}$ en hacerlo desde el extremo alejado.

$$t_1 = \frac{v}{c}\gamma t'_0 \quad t_2 = \frac{v}{c}\gamma t'_0 + \frac{L'}{\gamma c}$$

El observador en el cohete envió los destellos cuando su reloj marcó un tiempo t'_0 , sabemos que para el observador en la tierra este tiempo es igual a:

$$t = \gamma \left(t'_0 + \frac{v \cdot 0}{c^2} \right) = \gamma t'_0$$

Así, el tiempo total T_1 que un observador en tierra tarda en recibir el destello emitido por el extremo más cercano será:

$$T_1 = t_1 + \gamma t'_0 = \gamma t'_0 \left(1 + \frac{v}{c} \right)$$

mientras que el tiempo T_2 que tarda en recibir el destello emitido por el extremo más alejado será:

$$T_2 = t_2 + \gamma t'_0 = t'_0 \gamma \left(1 + \frac{v}{c} + \frac{L'}{c\gamma^2} \right)$$

Q.E.F.

Ejercicio 22 (Problema 5.9). (Junio 2017) Un tren de longitud en reposo L se mueve con velocidad $\frac{4}{5}c$ hacia la derecha, y otro tren de longitud en reposo $3L$ se mueve con velocidad $\frac{3}{5}c$ hacia la izquierda. Calcule qué velocidad \vec{u} (módulo y sentido) debería llevar un observador externo (que se mueve en paralelo a los trenes) para que las dos cabezas y las dos colas de los trenes queden enfrentadas simultáneamente. ¿Qué velocidad relativa lleva cada tren respecto al tercer observador? ¿Cuánto diría un observador en el primer tren que mide el segundo tren?

Solución. $L_{A,A} = L$, $L_{B,B} = 3L$, $v_{A,O} = \frac{4}{5}c$, $v_{B,O} = -\frac{3}{5}c$.

¿Cuánto diría un observador en el primer tren que mide el segundo tren?: Hallemos la velocidad relativa entre A y B :

$$v_{B,A} = \frac{v_{B,O} - v_{A,O}}{1 - \frac{1}{c^2}v_{B,O}v_{A,O}} = \frac{-\frac{3}{5}c - \frac{4}{5}c}{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)\frac{4}{5}} = \frac{-\frac{7}{5}}{1 + \frac{12}{25}} = \frac{-\frac{7}{5}}{\frac{37}{25}}c = -\frac{7 \cdot 25}{5 \cdot 37}c = -\frac{7 \cdot 5}{37}c = -\frac{35}{37}c$$

Aplicando contracción de longitudes, obtenemos:

$$L_{B,A} = \sqrt{1 - \frac{v_{B,A}^2}{c^2}}L_{B,B} = \sqrt{1 - \left(\frac{35}{37}\right)^2}3L \approx 0,97297297L$$

Calcule qué velocidad debe llevar un observador externo C para que vea las dos cabezas y las dos colas enfrentadas simultáneamente: Buscamos un tercer observador C que vea ambos trenes de la misma longitud. Vamos a usar la siguiente notación: $v_{A,B}$ es la velocidad con la que el observador B ve al A . Matemáticamente, debe cumplirse:

$$\begin{aligned} L_{A,C} &= \sqrt{1 - \frac{v_{A,C}^2}{c^2}} L_{A,A} \\ L_{B,C} &= \sqrt{1 - \frac{v_{B,C}^2}{c^2}} L_{B,B} \\ L_{A,C} = L_{B,C} &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{v_{A,C}^2}{c^2}\right) L_{A,A}^2 = \left(1 - \frac{v_{B,C}^2}{c^2}\right) L_{B,B}^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{c^2} v_{A,C}^2\right) \frac{L_{A,A}^2}{L_{B,B}^2} = 1 - \frac{1}{c^2} v_{B,C}^2 \end{aligned}$$

Definimos:

$$u_{A,C} := \frac{v_{A,C}}{c}, \quad u_{B,C} := \frac{v_{B,C}}{c}, \quad l := \frac{L_{A,A}}{L_{B,B}}$$

De esta forma, la ecuación anterior queda:

$$(1 - u_{A,C}^2) l^2 = 1 - u_{B,C}^2$$

Por otra parte, por la transformación de Lorentz para velocidades, obtenemos:

$$v_{A,C} = \frac{v_{A,O} - v_{C,O}}{1 - \frac{v_{C,O} v_{A,O}}{c^2}} \Leftrightarrow u_{A,C} = \frac{u_{A,O} - u_{C,O}}{1 - u_{C,O} u_{A,O}}$$

$$v_{B,C} = \frac{v_{B,O} - v_{C,O}}{1 - \frac{v_{C,O} v_{B,O}}{c^2}} \Leftrightarrow u_{B,C} = \frac{u_{B,O} - u_{C,O}}{1 - u_{C,O} u_{B,O}}$$

De esta forma, obtenemos:

$$\begin{aligned} &\left[1 - \left(\frac{u_{A,O} - u_{C,O}}{1 - u_{C,O} u_{A,O}}\right)^2\right] l^2 = 1 - \left(\frac{u_{B,O} - u_{C,O}}{1 - u_{C,O} u_{B,O}}\right)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow l^2 \left[1 - \frac{u_{A,O}^2 - 2u_{A,O}u_{C,O} + u_{C,O}^2}{1 - 2u_{C,O}u_{A,O} + u_{C,O}^2 u_{A,O}^2}\right] = 1 - \frac{u_{B,O}^2 - 2u_{B,O}u_{C,O} + u_{C,O}^2}{1 - 2u_{C,O}u_{B,O} + u_{C,O}^2 u_{B,O}^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow l^2 \frac{1 - 2u_{C,O}u_{A,O} + u_{C,O}^2 u_{A,O}^2 - u_{A,O}^2 + 2u_{A,O}u_{C,O} - u_{C,O}^2}{1 - 2u_{C,O}u_{A,O} + u_{C,O}^2 u_{A,O}^2} = \\ &= \frac{1 - 2u_{C,O}u_{B,O} + u_{C,O}^2 u_{B,O}^2 - u_{B,O}^2 + 2u_{B,O}u_{C,O} - u_{C,O}^2}{1 - 2u_{C,O}u_{B,O} + u_{C,O}^2 u_{B,O}^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow l^2 \frac{1 + u_{C,O}^2 u_{A,O}^2 - u_{A,O}^2 - u_{C,O}^2}{1 - 2u_{C,O}u_{A,O} + u_{C,O}^2 u_{A,O}^2} = \frac{1 + u_{C,O}^2 u_{B,O}^2 - u_{B,O}^2 - u_{C,O}^2}{1 - 2u_{C,O}u_{B,O} + u_{C,O}^2 u_{B,O}^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow l^2 \frac{(1 - u_{C,O}^2)(1 - u_{A,O}^2)}{(1 - u_{C,O}u_{A,O})^2} = \frac{(1 - u_{C,O}^2)(1 - u_{B,O}^2)}{(1 - u_{C,O}u_{B,O})^2} \end{aligned}$$

Obtenemos las soluciones triviales $u_{C,O} = \pm 1 \Leftrightarrow v_{C,O} = \pm c$. Al descartarlas, podemos dividir por $(1 - u_{C,O}^2)$, obteniendo:

$$\begin{aligned}
 l^2 \frac{1 - u_{A,O}^2}{(1 - u_{C,O}u_{A,O})^2} &= \frac{1 - u_{B,O}^2}{(1 - u_{C,O}u_{B,O})^2} \Leftrightarrow l^2 \frac{1 - u_{A,O}^2}{1 - u_{B,O}^2} = \left(\frac{1 - u_{C,O}u_{A,O}}{1 - u_{C,O}u_{B,O}} \right)^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \pm l \sqrt{\frac{1 - u_{A,O}^2}{1 - u_{B,O}^2}} = \frac{1 - u_{C,O}u_{A,O}}{1 - u_{C,O}u_{B,O}} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \pm l (1 - u_{C,O}u_{B,O}) \sqrt{\frac{1 - u_{A,O}^2}{1 - u_{B,O}^2}} = 1 - u_{C,O}u_{A,O} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \pm l \sqrt{\frac{1 - u_{A,O}^2}{1 - u_{B,O}^2}} - 1 = \left(\pm l u_{B,O} \sqrt{\frac{1 - u_{A,O}^2}{1 - u_{B,O}^2}} - u_{A,O} \right) u_{C,O} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow u_{C,O} = \frac{\pm l \sqrt{\frac{1 - u_{A,O}^2}{1 - u_{B,O}^2}} - 1}{\pm l u_{B,O} \sqrt{\frac{1 - u_{A,O}^2}{1 - u_{B,O}^2}} - u_{A,O}}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo por nuestros valores iniciales, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 u_{C,O} &= \frac{\pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1 - (\frac{4}{5})^2}{1 - (-\frac{3}{5})^2}} - 1}{\pm \frac{1}{3} (-\frac{3}{5}) \sqrt{\frac{1 - (\frac{4}{5})^2}{1 - (-\frac{3}{5})^2}} - \frac{4}{5}} = \\
 &= \frac{\pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1 - \frac{16}{25}}{1 - \frac{9}{25}} - 1}{\pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\frac{9}{25}}{\frac{16}{25}} - 1}} = \frac{\pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{9}{16} - 1}}{\mp \frac{1}{5} \sqrt{\frac{1 - \frac{16}{25}}{1 - \frac{9}{25}} - \frac{4}{5}}} = \\
 &\Leftrightarrow \frac{\pm \frac{1}{4} - 1}{\mp \frac{1}{5} \frac{3}{4} - \frac{4}{5}} = 5 \frac{\pm \frac{1}{4} - 1}{\mp \frac{3}{4} - 4} = 5 \frac{\pm \frac{1}{4} - 1}{\mp 3 - 16} = 5 \frac{\pm 1 - 4}{\mp 3 - 16} = \begin{cases} 5 \frac{1 - 4}{-3 - 16} = 5 \frac{-3}{-19} = \frac{15}{19} \\ 5 \frac{-1 - 4}{+3 - 16} = 5 \frac{-5}{-13} = \frac{25}{13} \end{cases} \perp
 \end{aligned}$$

Nótese que el último resultado es absurdo, ya que es mayor que 1 (y, de esta forma sería $v_{C,O}$ mayor que c). En consecuencia, debe ser:

$$v_{C,O} = \frac{15}{19}c \approx 0,789474c$$

A continuación, volvemos a:

$$\begin{aligned}
 v_{A,C} &= \frac{v_{A,O} - v_{C,O}}{1 - \frac{v_{C,O}v_{A,O}}{c^2}} = \frac{\frac{4}{5}c - \frac{15}{19}c}{1 - \frac{\frac{15}{19}c \frac{4}{5}c}{c^2}} = \frac{\frac{4}{5} - \frac{15}{19}}{1 - \frac{15}{19} \frac{4}{5}}c = \frac{\frac{76 - 75}{95}}{1 - \frac{12}{19}}c = \frac{\frac{1}{95}}{\frac{7}{19}}c = \frac{19}{95 \cdot 7}c = \\
 &= \frac{19}{19 \cdot 5 \cdot 7}c = \frac{1}{35}c \approx 0,028571c \\
 v_{B,C} &= \frac{v_{B,O} - v_{C,O}}{1 - \frac{v_{C,O}v_{B,O}}{c^2}} = \frac{-\frac{3}{5}c - \frac{15}{19}c}{1 - \frac{\frac{15}{19}c(-\frac{3}{5}c)}{c^2}} = -\frac{\frac{3}{5} + \frac{15}{19}}{1 + \frac{15}{19} \frac{3}{5}}c = -\frac{\frac{57 + 75}{95}}{1 + \frac{9}{19}}c = -\frac{\frac{132}{95}}{\frac{19 + 9}{19}}c = -\frac{\frac{132}{95}}{\frac{28}{19}}c = \\
 &= -\frac{132 \cdot 19}{95 \cdot 28}c = -\frac{66 \cdot 2 \cdot 19}{19 \cdot 5 \cdot 14 \cdot 2}c = -\frac{11 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 19}{19 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4}c = -\frac{11 \cdot 3}{5 \cdot 7}c = -\frac{33}{35}c \approx 0,942857c
 \end{aligned}$$

Q.E.F.

Ejercicio 23 (Problema 5.15). En cierto sistema de referencia se observa que una partícula posee una energía total de 5[GeV] y un momento de 3[GeV/c]. ¿Cuál es su masa en reposo? ¿Cuál es la energía de la partícula en un sistema en el que su momento es 4[GeV/c]? ¿Cuál es la velocidad relativa de los dos sistemas de referencia?

Solución. Recordemos la relación entre la energía total de una partícula con su momento:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

A partir de esta expresión, podemos despejar el valor de m como:

$$m = \frac{\sqrt{E^2 - p^2 c^2}}{c^2}$$

sustituyendo los valores aportados por el enunciado, tendremos que el valor de la masa en reposo es de:

$$m = \frac{\sqrt{(5)^2 - (3/c)^2 c^2}}{c^2} = 4[\text{GeV}/c^2]$$

Siendo que esta masa permanece constante para todos los observadores, la energía E' de esa misma partícula con un momento p' , será:

$$E' = \sqrt{p'^2 c^2 + mc^4} = \sqrt{(4/c)^2 c^2 + (4/c^2)^2 c^4} = 4\sqrt{2}[\text{GeV}]$$

La relación entre las energías medidas por dos sistemas de referencia moviéndose con una velocidad relativa v es la que sigue:

$$E' = \gamma(E - vp)$$

de modo que sustituyendo por los valores anteriormente calculados, deberemos despejar el valor de v :

$$\begin{aligned} 4\sqrt{2} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(5 - 3\frac{v}{c} \right) \\ 1 - \frac{v^2}{c^2} &= \frac{1}{32} \left(25 + 9\frac{v^2}{c^2} - 30\frac{v}{c} \right) \\ \frac{41}{32} \frac{v^2}{c^2} - \frac{15}{16} \frac{v}{c} - \frac{7}{32} &= 0 \\ \frac{v}{c} &= \frac{\frac{15}{16} \pm \sqrt{\left(\frac{15}{16}\right)^2 + 4 \left(\frac{41}{32}\right) \left(\frac{7}{32}\right)}}{2 \left(\frac{41}{32}\right)} \\ \frac{v}{c} &= \frac{\frac{15}{16} \pm \sqrt{2}}{\left(\frac{41}{16}\right)} = \frac{15 \pm 16\sqrt{2}}{41} \end{aligned}$$

$$v_1 \approx 0,918c \quad v_2 \approx -0,186c$$

Debido a que las velocidades relativas deben ser positivas, debemos descartar la velocidad v_2 , por lo que la velocidad relativa entre los dos sistemas de referencia será de:

$$v \approx 0,918c$$

Q.E.F.

Ejercicio 24 (Problema 5.18). (Septiembre 2017) Un pion sin carga (energía en reposo 135 MeV) se mueve a velocidad $v = 0,98c$ y se desintegra en dos fotones, que emergen con el mismo ángulo a cada lado de la dirección inicial de movimiento. Encuentre ese ángulo y la energía de cada fotón.

Solución. $v = \frac{49}{50}c$ y $E_0 = 135$ MeV

Lo primero, notemos que podemos hallar la masa del pion mediante la expresión:

$$E_0 = mc^2 \Leftrightarrow m = \frac{E_0}{c^2} \quad (5.9.1)$$

Llamemos θ al ángulo de desviación de los fotones con respecto al eje X . Así, por conservación del momento lineal tenemos en el eje X (la dirección del pion):

$$\begin{aligned} p = \gamma mv &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} mv = 2p_\gamma \cos \theta = 2\frac{E_\gamma}{c} \cos \theta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{E_0}{c^2} v &= 2\frac{E_\gamma}{c} \cos \theta \Leftrightarrow \frac{E_0}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c} = 2\frac{E_\gamma}{c} \cos \theta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{E_0}{2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c} &= E_\gamma \cos \theta \end{aligned} \quad (5.9.2)$$

Por conservación de la energía, tenemos:

$$\begin{aligned} E = \gamma mc^2 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} mc^2 = 2E_\gamma \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{E_0}{c^2} c^2 &= 2E_\gamma \Leftrightarrow \frac{E_0}{2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = E_\gamma \end{aligned}$$

Por último, sustituimos en la ecuación 5.9.2, obteniendo:

$$\frac{E_0}{2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c} = \frac{E_0}{2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{v}{c} \Leftrightarrow \theta = \arctan\left(\frac{v}{c}\right)$$

Sustituyendo por los valores numéricos, llegamos a:

$$\begin{aligned} E_\gamma &= \frac{135}{2\sqrt{1 - \left(\frac{49}{50}\right)^2}} \approx 339,200 \text{ MeV} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{49}{50}\right) \approx 0,775297 \text{ rad} \approx 44,4213^\circ \end{aligned}$$

Q.E.F.

Ejercicio 25 (Problema 5.19). (Junio 2018) Dos cuerpos idénticos de masa m se aproximan el uno al otro con velocidades de igual módulo v (comparable a c) respecto a un observador O . Tras un choque perfectamente inelástico queda una única partícula. Determine la masa del nuevo cuerpo, según el observador O . Repita de nuevo el problema según un observador O' que se encuentra en reposo respecto a uno de los cuerpos iniciales.

Solución.

Para el observador O : Nótese que, según el enunciado, las partículas quedan quietas tras el choque. Por conservación de la energía tenemos:

$$2\gamma mc^2 = Mc^2 \Leftrightarrow 2\gamma m = M$$

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Para el observador $O' \equiv 1$: Primero, tenemos que hallar la velocidad con la que el observador O' ve a la partícula que no está en reposo:

$$v_{2,1} = \frac{v_{2,O} - v_{1,O}}{1 - \frac{v_{1,O}v_{2,O}}{c^2}} = \frac{-v - v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

Por conservación del momento lineal, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{0}{c^2}}} 0 + \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v_{2,1}^2}{c^2}}} v_{2,1} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} MV \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v_{2,1}^2}{c^2}}} v_{2,1} &= \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} V \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{m^2}{1 - \frac{v_{2,1}^2}{c^2}} v_{2,1}^2 &= \frac{M^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} V^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{m^2 v_{2,1}^2}{1 - \frac{v_{2,1}^2}{c^2}} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) &= M^2 V^2 \Leftrightarrow \frac{m^2 v_{2,1}^2}{1 - \frac{v_{2,1}^2}{c^2}} = \left(\frac{1}{c^2} \frac{m^2 v_{2,1}^2}{1 - \frac{v_{2,1}^2}{c^2}} + M^2\right) V^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{m^2 v_{2,1}^2 c^2}{c^2 - v_{2,1}^2} &= \left(\frac{m^2 v_{2,1}^2}{c^2 - v_{2,1}^2} + M^2\right) V^2 \Leftrightarrow \frac{V^2}{c^2} = \frac{\frac{m^2 v_{2,1}^2}{c^2 - v_{2,1}^2}}{\frac{m^2 v_{2,1}^2}{c^2 - v_{2,1}^2} + M^2} = \frac{A}{A + M^2} \end{aligned}$$

Por otra parte, por conservación de la energía:

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 = E_f &\Leftrightarrow mc^2 + \gamma_2 mc^2 = \gamma_f mc^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow mc^2 + \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v_{2,1}^2}{c^2}}} c^2 &= \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} c^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow m \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{2,1}^2}{c^2}}}\right) &= \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Sustituyendo, tenemos:

$$\begin{aligned} m \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{2,1}^2}{c^2}}}\right) &= \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{A}{A + M^2}}} = \frac{M}{\sqrt{\frac{A + M^2 - A}{A + M^2}}} = \frac{M}{\sqrt{\frac{M^2}{A + M^2}}} = \frac{M}{\frac{M}{\sqrt{A + M^2}}} = \sqrt{A + M^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow m^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{2,1}^2}{c^2}}}\right)^2 &= A + M^2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow M^2 &= m^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{2,1}^2}{c^2}}} \right)^2 - A = \\
&= m^2 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{v_{2,1}^2}{c^2}}} + \frac{1}{1 - \frac{v_{2,1}^2}{c^2}} \right) - \frac{m^2 v_{2,1}^2}{c^2 - v_{2,1}^2} = \\
&= m^2 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{v_{2,1}^2}{c^2}}} \right) + \frac{m^2 c^2}{c^2 - v_{2,1}^2} - \frac{m^2 v_{2,1}^2}{c^2 - v_{2,1}^2} = \\
&= m^2 + \frac{2m^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{2,1}^2}{c^2}}} + \frac{m^2}{c^2 - v_{2,1}^2} (c^2 - v_{2,1}^2) = \\
&= 2m^2 + \frac{2m^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{2,1}^2}{c^2}}} = 2m^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{2,1}^2}{c^2}}} \right) = \\
&= 2m^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\frac{4v^2}{(1 + \frac{v^2}{c^2})^2}}{c^2}}} \right) = 2m^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\frac{4v^2}{(c^2 + v^2)^2}}{\frac{c^4}{c^2}}}} \right) = 2m^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4v^2 c^2}{(c^2 + v^2)^2}}} \right) = \\
&= 2m^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{(c^2 + v^2)^2 - 4v^2 c^2}{(c^2 + v^2)^2}}} \right) = 2m^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{c^4 + v^4 + 2c^2 v^2 - 4v^2 c^2}{(c^2 + v^2)^2}}} \right) = \\
&= 2m^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{c^4 + v^4 - 2v^2 c^2}{(c^2 + v^2)^2}}} \right) = 2m^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{(c^2 - v^2)^2}{(c^2 + v^2)^2}}} \right) = 2m^2 \left(1 + \frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} \right) = \\
&= 2m^2 \frac{c^2 - v^2 + c^2 + v^2}{c^2 - v^2} = \frac{4m^2 c^2}{c^2 - v^2} \Rightarrow M = \frac{2mc}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2m}{\sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2}}} = \frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}$$

Q.E.F.

Bibliografía

- [1] Clases impartidas por Francisco Javier Salgado Remacha en la asignatura de Mecánica Clásica II del curso 2018-2019 del grado de Física en la Universidad de Zaragoza.
- [2] Taylor, John. R. (2013) *Mecánica clásica*. Barcelona: Editorial Reverté.
- [3] Apuntes de la asignatura de Análisis Matemático II, impartida por Ana Peña Arenas, del curso 2018-2019 del grado de Matemáticas en la Universidad de Zaragoza.
- [4] Apuntes de la asignatura de Álgebra II, impartida por Jesús Jerónimo Clemente Gallardo, del curso 2017-2018 del grado de Física en la Universidad de Zaragoza.
- [5] Clases impartidas por Eduardo Martínez Fernández en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias del curso 2018-2019 del grado de Matemáticas en la Universidad de Zaragoza.
- [6] Laín Sanclemente, Andrés y Calvo Arnal, Miguel. (2019) *Mecánica clásica I*. [En línea]. Disponible en https://drive.google.com/open?id=1MvDuXMtBztZwlLrwDbT0bp_P6V-FZ95c [Consultado 16/02/2019].
- [7] Janssen, Bert (2013) *Teoría de la Relatividad General*. [En línea] Universidad de Granada. Disponible en <https://www.ugr.es/~bjanssen/text/BertJanssen-RelatividadGeneral.pdf> [Consultado 16/02/2019].
- [8] Guerrero Marcos, Juan. (2019) *Dinámica de una cuerda en caída libre*. [En línea]. Disponible en <https://drive.google.com/open?id=15cupQKhf9YPH9TyjmnWxDfYWET1PRYEA> [Consultado 16/02/2019].
- [9] *Lebesgue integration*. [En línea]. Wikipedia, the free encyclopediia, 2019. Disponible en https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lebesgue_integration&oldid=892240081 [Consultado 16/02/2019].
- [10] *Integral de Lebesgue*. [En línea]. Wikipedia, la enciclopedia libre, 2019. Disponible en https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integral_de_Lebesgue&oldid=102474305 [Consultado 16/02/2019].
- [11] *Tsiolkovsky rocket equation*. [En línea]. Wikipedia, the free encyclopediia, 2019. Disponible en https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Tsiolkovsky_rocket_equation&oldid=894716858 [Consultado 16/02/2019]
- [12] *Ecuación del cohete de Tsiolkovski*. [En línea]. Wikipedia, la enciclopedia libre, 2019. Disponible en https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Ecuaci%C3%B3n_del_cohete_de_Tsiolkovski&oldid=113280904 [Consultado 16/02/2019].
- [13] *Angular momentum*. [En línea]. Wikipedia, the free encyclopediia, 2019. Disponible en https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Angular_momentum&oldid=898350590 [Consultado 16/02/2019]

- [14] *Moment of inertia*. [En línea]. Wikipedia, the free encyclopediia, 2019. Disponible en https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Moment_of_inertia&oldid=901653365 [Consultado 16/02/2019]
- [15] *List of moments of inertia*. [En línea]. Wikipedia, the free encyclopediia, 2019. Disponible en https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=List_of_moments_of_inertia&oldid=895105024 [Consultado 16/02/2019]
- [16] *Parallel axis theorem*. [En línea]. Wikipedia, the free encyclopediia, 2019. Disponible en https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Parallel_axis_theorem&oldid=891743909 [Consultado 16/02/2019]
- [17] *Euler's equations (rigid body dynamics)*. [En línea]. Wikipedia, the free encyclopediia, 2019. Disponible en [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Euler%27s_equations_\(rigid_body_dynamics\)&oldid=895590852](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Euler%27s_equations_(rigid_body_dynamics)&oldid=895590852) [Consultado 16/02/2019]
- [18] *Euler angles*. [En línea]. Wikipedia, the free encyclopediia, 2019. Disponible en https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Euler_angles&oldid=899368368 [Consultado 16/02/2019]
- [19] *Rotation formalisms in three dimensions*. [En línea]. Wikipedia, the free encyclopediia, 2019. Disponible en https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Rotation_formalisms_in_three_dimensions&oldid=898128278 [Consultado 16/02/2019]
- [20] *Rotation matrix*. [En línea]. Wikipedia, the free encyclopediia, 2019. Disponible en https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Rotation_matrix&oldid=901414366 [Consultado 16/02/2019]
- [21] *atan2*. [En línea]. Wikipedia, the free encyclopediia, 2019. Disponible en <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Atan2&oldid=892251352> [Consultado 16/02/2019]
- [22] *Fundamental lemma of calculus of variations*. [En línea]. Wikipedia, the free encyclopediia, 2019. Disponible en https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fundamental_lemma_of_calculus_of_variations&oldid=890913476 [Consultado 16/02/2019]
- [23] *Integration by parts*. [En línea]. Wikipedia, the free encyclopediia, 2019. Disponible en https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Integration_by_parts&oldid=900663277 [Consultado 16/02/2019]
- [24] *Green's identities*. [En línea]. Wikipedia, the free encyclopediia, 2019. Disponible en https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Green%27s_identities&oldid=899721465 [Consultado 16/02/2019]
- [25] *Euler–Lagrange equation*. [En línea]. Wikipedia, the free encyclopediia, 2019. Disponible en https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Euler%27s_Lagrange_equation&oldid=892084205 [Consultado 16/02/2019]
- [26] *Wave equation*. [En línea]. Wikipedia, the free encyclopediia, 2019. Disponible en https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Wave_equation&oldid=901821400 [Consultado 16/02/2019]
- [27] *Lorentz transformation*. [En línea]. Wikipedia, the free encyclopediia, 2019. Disponible en https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lorentz_transformation&oldid=900381934 [Consultado 16/02/2019].
- [28] *Derivations of the Lorentz transformations*. [En línea]. Wikipedia, the free encyclopediia, 2019. Disponible en https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Derivations_of_the_Lorentz_transformations&oldid=895850814 [Consultado 16/02/2019].

- [29] *Minkowski space*. [En línea]. Wikipedia, the free encyclopediia, 2019. Disponible en https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Minkowski_space&oldid=901482949 [Consultado 16/02/2019].
- [30] *Cuadrivector*. [En línea]. Wikipedia, la enciclopedia libre, 2019. Disponible en <https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Cuadrivector&oldid=112556783> [Consultado 16/02/2019].
- [31] *Relativistic mechanics*. [En línea]. Wikipedia, the free encyclopediia, 2019. Disponible en https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Relativistic_mechanics&oldid=877450365 [Consultado 16/02/2019].
- [32] *Lorentz Transformations of Energy and Momentum*. [En línea]. Physics LibreTexts, 2019. Disponible en [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Particle_Physics/Book%3A_Nuclear_and_Particle_Physics_\(Walet\)/10%3A_Relativistic_Kinematics/10.1%3A_Lorentz_Transformations_of_Energy_and_Momentum](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Particle_Physics/Book%3A_Nuclear_and_Particle_Physics_(Walet)/10%3A_Relativistic_Kinematics/10.1%3A_Lorentz_Transformations_of_Energy_and_Momentum) [Consultado 16/02/2019].
- [33] *Kinetic energy*. [En línea]. Wikipedia, the free encyclopediia, 2019. Disponible en https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kinetic_energy&oldid=901028740 [Consultado 16/02/2019].
- [34] *Path integral formulation*. [En línea]. Wikipedia, the free encyclopediia, 2019. Disponible en https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Path_integral_formulation&oldid=890888009 [Consultado 16/02/2019].